Programação Dinâmica & Algoritmos Gulosos

KT 6.4

Aproveite para olhar todo o Cap 6 do KT,
que é sobre programação dinâmica.

= "recursão–com–tabela"
= transformação inteligente de recursão em iteração

Mochila

Dados dois vetores $x[1\,..\,n]$ e $w[1\,..\,n]$,
denotamos por $x \cdot w$ o produto escalar

$$w[1]x[1] + w[2]x[2] + \cdots + w[n]x[n].$$

Suponha dado um número inteiro não-negativo W
e vetores positivos $w[1\,..\,n]$ e $v[1\,..\,n]$.

Uma mochila é qualquer vetor $x[1\,..\,n]$ tal que

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \text{ para todo } i$$

O valor de uma mochila $x[1\,..\,n]$ é o número $x \cdot v$.

Problema da mochila booleana

Uma mochila $x[1\,..\,n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Problema da mochila booleana

Uma mochila $x[1\,..\,n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Uma mochila booleana $x[1\,..\,n]$ é ótima se tem valor máximo dentre todas as mochilas booleanas.

Problema da mochila booleana

Uma mochila $x[1\,..\,n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Uma mochila booleana $x[1\,..\,n]$ é ótima se tem valor máximo dentre todas as mochilas booleanas.

Problema (Knapsack Problem):
Dados (w, v, n, W), encontrar uma mochila boolena ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4	
w	40	30	20	10	
v	840	600	400	100	
x	1	0	0	0	valor $= 840$
x	1	0	0	1	valor $= 940$
x	0	1	1	0	valor $= 1000$

Subestrutura ótima

Suponha que $x^*[1\,..\,n]$ é
mochila boolena ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x^*[n] = 1$

então $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila boolena ótima
para $(w, v, n-1, W - w[n])$

Subestrutura ótima

Suponha que $x^*[1\,..\,n]$ é
mochila boolena ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x^*[n] = 1$

então $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila boolena ótima
para $(w, v, n-1, W - w[n])$

senão $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila boolena ótima
para $(w, v, n-1, W)$

Subestrutura ótima

Suponha que $x^*[1\,..\,n]$ é
mochila boolena ótima para o problema (w, v, n, W).

Se $x^*[n] = 1$

então $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila boolena ótima
para $(w, v, n-1, W - w[n])$

senão $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila boolena ótima
para $(w, v, n-1, W)$

NOTA. Não há nada de especial acerca do índice n.
Uma afirmação semelhante vale para qualquer índice i.

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

capacidade

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

itens $1, 2, .., i$

Simplificação

Problema:
encontrar o valor de uma mochila booleana ótima.

capacidade

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

itens $1, 2, .., i$

Possíveis valores de Y: $0, 1, 2, \ldots, W$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

Recorrência

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w[i] > Y$

Recorrência

$t[i, Y]$ = valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w_i > Y$

Recorrência

$t[i, Y] =$ valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, i, Y)

$t[0, Y] = 0$ para todo Y

$t[i, 0] = 0$ para todo i

$t[i, Y] = t[i-1, Y]$ se $w_i > Y$

$t[i, Y] = \max\{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w_i] + v_i\}$ se $w_i \leq Y$

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

```
REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n, W)
1  se n = 0 ou W = 0
2      então devolva 0
3  se w[n] > W
4      então devolva REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W)
5  a ← REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W)
6  b ← REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W−w[n]) + v[n]
7  devolva max {a, b}
```

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

```
REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n, W)
1  se n = 0 ou W = 0
2      então devolva 0
3  se w[n] > W
4      então devolva REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W)
5  a ← REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W)
6  b ← REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W−w[n]) + v[n]
7  devolva max {a, b}
```

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$.

Solução recursiva

Devolve o valor de uma mochila ótima para (w, v, n, W).

```
REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n, W)
1  se n = 0 ou W = 0
2      então devolva 0
3  se w[n] > W
4      então devolva REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W)
5  a ← REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W)
6  b ← REC-MOCHILA-BOOL (w, v, n−1, W−w[n]) + v[n]
7  devolva max {a, b}
```

Consumo de tempo no pior caso é $\Omega(2^n)$.

Por que demora tanto?
O mesmo subproblema é resolvido muitas vezes.

Programação dinâmica

Cada subproblema, valor de uma mochila ótima para

$$(w, v, i, Y),$$

é resolvido uma só vez.

Em que ordem calcular os componentes da tabela t?

Programação dinâmica

$$t[i, Y] = \begin{cases} t[i-1, Y] & \text{se } w_i > Y \\ \max\left\{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w_i] + v_i\right\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7
						Y		
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0							
2	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$		
3	0					??		
4	0							
5	0							
6	0							
7	0							

i

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0				
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0			
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0		
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0					
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0				
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400			
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400		
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	500
3	0					
4	0					

Exemplo

$W = 5$ e $n = 4$

	1	2	3	4
w	4	2	1	3
v	500	400	300	450

i \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	500	500
2	0	0	400	400	500	500
3	0	300	400	700	700	800
4	0	300	400	700	750	850

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W).

```
MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)
 1  para Y ← 0 até W faça
 2      t[0, Y] ← 0
 3      para i ← 1 até n faça
 4          a ← t[i−1, Y]
 5          se w[i] > Y
 6              então b ← 0
 7              senão b ← t[i−1, Y −w[i]] + v[i]
 8          t[i, Y] ← max{a, b}
 9  devolva t[n, W]
```

Algoritmo de programação dinâmica

Devolve o valor de uma mochila booleana ótima para (w, v, n, W).

```
MOCHILA-BOOLEANA (w, v, n, W)
 1  para Y ← 0 até W faça
 2      t[0, Y] ← 0
 3      para i ← 1 até n faça
 4          a ← t[i−1, Y]
 5          se w[i] > Y
 6              então b ← 0
 7              senão b ← t[i−1, Y −w[i]] + v[i]
 8          t[i, Y] ← max{a, b}
 9  devolva t[n, W]
```

Consumo de tempo é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

Conclusão

O consumo de tempo do algoritmo
MOCHILA-BOOLEANA é $\Theta(nW)$.

NOTA:
Se W é $\Omega(2^n)$ o consumo de tempo é $\Omega(n2^n)$,
mais lento que o algoritmo força bruta!

Obtenção de uma mochila ótima

```
MOCHILA (w, n, W, t)
1   Y ← W
2   para i ← n decrescendo até 1 faça
3       se t[i, Y] = t[i−1, Y]
4           então x[i] ← 0
5           senão x[i] ← 1
6                 Y ← Y − w[i]
7   devolva x
```

Obtenção de uma mochila ótima

```
MOCHILA (w, n, W, t)
1   Y ← W
2   para i ← n decrescendo até 1 faça
3       se t[i, Y] = t[i−1, Y]
4           então x[i] ← 0
5           senão x[i] ← 1
6                 Y ← Y − w[i]
7   devolva x
```

Consumo de tempo é $\Theta(n)$.

Problema da mochila booleana

Uma mochila $x[1\,..\,n]$ tal que
$x[i] = 0$ ou $x[i] = 1$ para todo i é dita booleana.

Uma mochila booleana $x[1\,..\,n]$ é ótima se tem valor máximo dentre todas as mochilas booleanas.

Problema (Knapsack Problem):
Dados (w, v, n, W), encontrar uma mochila boolena ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4	
w	40	30	20	10	
v	840	600	400	100	
x	1	0	0	0	valor $= 840$
x	1	0	0	1	valor $= 940$
x	0	1	1	0	valor $= 1000$

Problema da mochila fracionária

Uma mochila booleana $x[1\,..\,n]$ é ótima se tem valor máximo.

Problema (Fractional Knapsack Problem):
Dados (w, v, n, W), encontrar uma mochila ótima.

Exemplo: $W = 50$, $n = 4$

	1	2	3	4	
w	40	30	20	10	
v	840	600	400	100	
x	1	0	0	0	valor $= 840$
x	1	0	0	1	valor $= 940$
x	0	1	1	0	valor $= 1000$
x	1	1/3	0	0	valor $= 1040$

Subestrutura ótima: versão fracionária

Suponha que $x^*[1\,..\,n]$ é mochila ótima
para o problema (w, v, n, W).

Subestrutura ótima: versão fracionária

Suponha que $x^*[1\,..\,n]$ é mochila ótima
para o problema (w, v, n, W).

Se $x^*[n] = \delta$

então $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila ótima para

$$(w, v, n-1, W - \delta w_n)$$

Subestrutura ótima: versão fracionária

Suponha que $x^*[1\,..\,n]$ é mochila ótima
para o problema (w, v, n, W).

Se $x^*[n] = \delta$

então $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila ótima para

$$(w, v, n-1, W - \delta w_n)$$

NOTA. Não há nada de especial acerca do índice n.
Uma afirmação semelhante vale para qualquer índice i.

Uma "recorrência contínua"

$q[i, Y]$ = valor de uma mochila ótima para (w, v, i, Y)

$q[0, Y] = 0$ para todo Y

$q[i, 0] = 0$ para todo i

Uma "recorrência contínua"

$q[i, Y]$ = valor de uma mochila ótima para (w, v, i, Y)

$q[0, Y] = 0$ para todo Y

$q[i, 0] = 0$ para todo i

$$q[i, Y] = \max_{0 \leq \delta \leq \min\{1, Y/w_i\}} q[i-1, Y - \delta w_i]$$

Uma "recorrência contínua"

$q[i, Y]$ = valor de uma mochila ótima para (w, v, i, Y)

$q[0, Y] = 0$ para todo Y

$q[i, 0] = 0$ para todo i

$$q[i, Y] = \max_{0 \leq \delta \leq \min\{1, Y/w_i\}} q[i-1, Y - \delta w_i]$$

Compare com mochilas booleanas:

$$t[i, Y] = \begin{cases} t[i-1, Y] & \text{se } w_i > Y \\ \max\left\{t[i-1, Y], t[i-1, Y-w_i] + v_i\right\} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Propriedade de escolha gulosa

Suponha que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Então EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ tal que

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w[n]}\right\}$$

Propriedade de escolha gulosa

Suponha que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Então EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ tal que

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w[n]}\right\}$$

Este fato CRUCIAL será provado mais tarde.

Escolha gulosa + subestrutura ótima

Suponha que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Então EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ tal que

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w[n]}\right\}$$

Se $x^*[n] = \delta$, então $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila ótima para

$$(w, v, n-1, W - \delta w_n)$$

Escolha gulosa + subestrutura ótima

Suponha que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Então EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ tal que

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w[n]}\right\}$$

Se $x^*[n] = \delta$, então $x^*[1\,..\,n-1]$ é mochila ótima para

$$(w, v, n-1, W - \delta w_n)$$

Isso sugere o seguinte algoritmo recursivo para o problema.

Algoritmo guloso

Devolve uma mochila ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-FRACIONÁRIA (w, v, n, W)

0 ordene w e v de modo que $\dfrac{v[1]}{w[1]} \leq \dfrac{v[2]}{w[2]} \leq \cdots \leq \dfrac{v[n]}{w[n]}$

1 $\triangleright$ $x^*[1\,..\,n]$ é um vetor
2 MOCHILA-FRAC-REC(w, v, n, W, x^*)
3 **devolva** x^*

MOCHILA-FRAC-REC (w, v, i, Y, x^*)

1 **se** $i > 0$
2 **então** $\delta \leftarrow \min\{1, Y/w[i]\}$
3 $x^*[i] \leftarrow \delta$
4 MOCHILA-FRAC-REC$(w, v, i-1, Y - \delta w[i], x^*)$

Algoritmo guloso

Devolve uma mochila ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-FRACIONÁRIA (w, v, n, W)

0 ordene w e v de modo que $\dfrac{v[1]}{w[1]} \leq \dfrac{v[2]}{w[2]} \leq \cdots \leq \dfrac{v[n]}{w[n]}$

1 $\triangleright$ $x^*[1\,..\,n]$ é um vetor
2 MOCHILA-FRAC-REC(w, v, n, W, x^*)
3 **devolva** x^*

MOCHILA-FRAC-REC (w, v, i, Y, x^*)

1 **se** $i > 0$
2 **então** $\delta \leftarrow \min\{1, Y/w[i]\}$
3 $x^*[i] \leftarrow \delta$
4 MOCHILA-FRAC-REC$(w, v, i-1, Y - \delta w[i], x^*)$

Corretude: segue da propriedade de escolha gulosa e da subestrutura ótima, por indução em n

Algoritmo guloso

Devolve uma mochila ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-FRACIONÁRIA (w, v, n, W)

0 ordene w e v de modo que $\dfrac{v[1]}{w[1]} \leq \dfrac{v[2]}{w[2]} \leq \cdots \leq \dfrac{v[n]}{w[n]}$

1 $\triangleright$ $x^*[1\,..\,n]$ é um vetor
2 MOCHILA-FRAC-REC(w, v, n, W, x^*)
3 **devolva** x^*

MOCHILA-FRAC-REC (w, v, i, Y, x^*)

1 **se** $i > 0$
2 **então** $\delta \leftarrow \min\{1, Y/w[i]\}$
3 $x^*[i] \leftarrow \delta$
4 MOCHILA-FRAC-REC$(w, v, i-1, Y - \delta w[i], x^*)$

Consumo de tempo?

Algoritmo guloso iterativo

Devolve uma mochila ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-FRACIONÁRIA-ITER (w, v, n, W)

0 ordene w e v de modo que $\dfrac{v[1]}{w[1]} \leq \dfrac{v[2]}{w[2]} \leq \cdots \leq \dfrac{v[n]}{w[n]}$

1 **para** $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 1 **faça**
2 $\quad \delta \leftarrow \min\{1, W/w[i]\}$
3 $\quad x^*[i] \leftarrow \delta$
4 $\quad W \leftarrow W - \delta w[i]$
5 **devolva** x^*

Algoritmo guloso iterativo

Devolve uma mochila ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-FRACIONÁRIA-ITER (w, v, n, W)

0 ordene w e v de modo que $\dfrac{v[1]}{w[1]} \leq \dfrac{v[2]}{w[2]} \leq \cdots \leq \dfrac{v[n]}{w[n]}$

1 **para** $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 1 **faça**
2 $\quad \delta \leftarrow \min\{1, W/w[i]\}$
3 $\quad x^*[i] \leftarrow \delta$
4 $\quad W \leftarrow W - \delta w[i]$
5 **devolva** x^*

Consumo de tempo da linha 0 é $\Theta(n \lg n)$.

Consumo de tempo das linhas 1–7 é $\Theta(n)$.

Algoritmo guloso iterativo

Devolve uma mochila ótima para (w, v, n, W).

MOCHILA-FRACIONÁRIA-ITER (w, v, n, W)

0 ordene w e v de modo que $\dfrac{v[1]}{w[1]} \leq \dfrac{v[2]}{w[2]} \leq \cdots \leq \dfrac{v[n]}{w[n]}$

1 **para** $i \leftarrow n$ **decrescendo até** 1 **faça**
2 $\quad \delta \leftarrow \min\{1, W/w[i]\}$
3 $\quad x^*[i] \leftarrow \delta$
4 $\quad W \leftarrow W - \delta w[i]$
5 **devolva** x^*

Corretude: segue da corretude do algoritmo recursivo, pois esta é a versão iterativa obtida da eliminação da recursão de cauda

Prova da escolha gulosa

Suponha de agora em diante que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Precisamos mostrar que EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ t.q.

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\} =: \alpha$$

Prova da escolha gulosa

Suponha de agora em diante que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Precisamos mostrar que EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ t.q.

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\} =: \alpha$$

Técnica:
transformar uma solução ótima em uma solução ótima 'gulosa'.

Prova da escolha gulosa

Suponha de agora em diante que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Precisamos mostrar que EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ t.q.

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\} =: \alpha$$

Técnica:
transformar uma solução ótima em uma solução ótima 'gulosa'.

Dentre toda mochila ótima $\bar{x}[1\,..\,n]$ para (w, v, n, W), escolha uma t.q. $\bar{x}[n]$ é o maior possível.

Afirmação: $\bar{x}[n] \leq \alpha$ (Por quê?)

Prova da escolha gulosa

Suponha de agora em diante que $\frac{v_n}{w_n} \geq \frac{v_i}{w_i}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$

Precisamos mostrar que EXISTE uma mochila ótima $x^*[1\,..\,n]$ t.q.

$$x^*[n] = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\} =: \alpha$$

Técnica:
transformar uma solução ótima em uma solução ótima 'gulosa'.

Dentre toda mochila ótima $\bar{x}[1\,..\,n]$ para (w, v, n, W), escolha uma t.q. $\bar{x}[n]$ é o maior possível.

Então $\bar{x}[n] \leq \alpha$. Se vale igualdade, a prova acabou, pois $\bar{x}[1\,..\,n]$ é mochila ótima. Suponha então que $\bar{x}[n] < \alpha$.

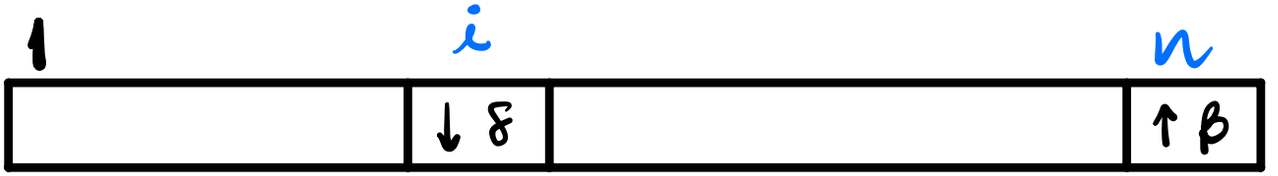
Ideia

Dentre toda mochila ótima $\bar{x}[1\,..\,n]$ para (w, v, n, W), escolha uma t.q. $\bar{x}[n]$ é o maior possível. Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha$.

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.



Ideia

Dentre toda mochila ótima $\bar{x}[1\,..\,n]$ para (w, v, n, W), escolha uma t.q. $\bar{x}[n]$ é o maior possível. Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha$.

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.



Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Ideia

Dentre toda mochila ótima $\bar{x}[1\,..\,n]$ para (w, v, n, W), escolha uma t.q. $\bar{x}[n]$ é o maior possível. Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha$.

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.



Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Então $x'[1\,..\,n]$ é mochila ótima e $x'[n] > \bar{x}[n]$, contradição.

Ideia: detalhes

Uma mochila é um vetor $x[1\,..\,n]$ t.q.

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \text{ para todo } i$$

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Ideia: detalhes

Uma mochila é um vetor $x[1\,..\,n]$ t.q.

$$x \cdot w \leq W \quad \text{e} \quad 0 \leq x[i] \leq 1 \text{ para todo } i$$

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0$

$$\bar{x}[n] + \beta \leq 1$$

$$\bar{x} \cdot w \geq x' \cdot w$$

$$\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$$

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0$

$$\bar{x}[n] + \beta \leq \alpha$$

$$\bar{x} \cdot w \geq x' \cdot w$$

$$\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$$

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0 \Leftarrow$ Sequer existe tal índice i?

$$\bar{x}[n] + \beta \leq \alpha$$

$$\bar{x} \cdot w \geq x' \cdot w$$

$$\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$$

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0 \Leftarrow$ Sequer existe tal índice i?

$$\bar{x}[n] + \beta \leq \alpha$$

$$\bar{x} \cdot w \geq x' \cdot w$$

$$\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$$

Se $\bar{x}[1\,..\,n) = 0$, então $\bar{x}$ tem valor $v[n]\bar{x}[n]$, menor que o valor $v[n]\alpha$ de uma mochila com α unidades do item n.

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0 \Leftarrow$ Sequer existe tal índice i? EXISTE!

$$\bar{x}[n] + \beta \leq \alpha$$

$$\bar{x} \cdot w \geq x' \cdot w$$

$$\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$$

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0 \Leftarrow$ Sequer existe tal índice i? EXISTE!

$$\bar{x}[n] + \beta \leq \alpha$$

$$\bar{x} \cdot w \geq x' \cdot w = \bar{x} \cdot w + \beta w_n - \delta w_i$$

$$\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v = \bar{x} \cdot v + \beta v_n - \delta v_i$$

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0 \Leftarrow$ Sequer existe tal índice i? EXISTE!

$$\bar{x}[n] + \beta \leq \alpha$$

$$\bar{x} \cdot w \geq \bar{x} \cdot w + \beta w_n - \delta w_i \iff \delta w_i \geq \beta w_n$$

$$\bar{x} \cdot v \leq \bar{x} \cdot v + \beta v_n - \delta v_i \iff \delta v_i \leq \beta v_n$$

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0$ Existe $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $\bar{x}[i] > 0$

$$\beta \leq \alpha - \bar{x}[n]$$

$$\delta w_i \geq \beta w_n$$

$$\delta v_i \leq \beta v_n$$

Ideia: detalhes

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$. Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

para certas escolhas de índice $i \in [1\,..\,n)$ e números $\beta, \delta > 0$.

Queremos: $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Precisamos: $\bar{x}[i] \geq \delta > 0$ Existe $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $\bar{x}[i] > 0$

$$\beta \leq \alpha - \bar{x}[n]$$

$$\delta w_i \geq \beta w_n$$

$$\delta v_i \leq \beta v_n$$

Tome $\delta := \min\left\{\bar{x}[i], (\alpha - \bar{x}[n])\dfrac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\dfrac{w_i}{w_n}$

Escolha gulosa: epílogo

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$.

Já provamos que existe um índice $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $\bar{x}[i] > 0$.

Tome $\delta := \min\left\{\bar{x}[i], (\alpha - \bar{x}[n])\dfrac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\dfrac{w_i}{w_n}$

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

Verifique que $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e que $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Escolha gulosa: epílogo

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$.

Já provamos que existe um índice $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $\bar{x}[i] > 0$.

Tome $\delta := \min\left\{\bar{x}[i], (\alpha - \bar{x}[n])\dfrac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\dfrac{w_i}{w_n}$

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

Verifique que $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e que $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Logo, $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila ótima com $x'[n] > \bar{x}[n]$, contradição.

Escolha gulosa: epílogo

Suponha que $\bar{x}[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$.

Já provamos que existe um índice $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $\bar{x}[i] > 0$.

Tome $\delta := \min\left\{\bar{x}[i], (\alpha - \bar{x}[n])\dfrac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\dfrac{w_i}{w_n}$

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} \bar{x}[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ \bar{x}[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ \bar{x}[n] + \beta & \text{se } j = n \end{cases}$$

Verifique que $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila para (w, v, n, W) e que $\bar{x} \cdot v \leq x' \cdot v$.

Logo, $x'[1\,..\,n]$ é uma mochila ótima com $x'[n] > \bar{x}[n]$, contradição.

Portanto, $\bar{x}[n] = \alpha$.

Escolha gulosa e concordância de soluções

Podemos considerar a execução do algoritmo guloso "paralela" a um processo por uma entidade computacional "ilimitada", que já conhece uma solução ótima x^*.

Escolha gulosa e concordância de soluções

Podemos considerar a execução do algoritmo guloso "paralela" a um processo por uma entidade computacional "ilimitada", que já conhece uma solução ótima x^*.

A cada iteração gulosa, atualizamos a solução ótima x^* para que "concorde" com a solução x em construção pelo algoritmo, nos itens em que a escolha gulosa já foi feita.

Esta atualização é feita pela mudança local descrita na prova da escolha gulosa e NÃO altera o peso $x^* \cdot w$ nem o valor $x^* \cdot v$ de x^*.

Escolha gulosa e concordância de soluções

Podemos considerar a execução do algoritmo guloso "paralela" a um processo por uma entidade computacional "ilimitada", que já conhece uma solução ótima x^*.

A cada iteração gulosa, atualizamos a solução ótima x^* para que "concorde" com a solução x em construção pelo algoritmo, nos itens em que a escolha gulosa já foi feita.

Esta atualização é feita pela mudança local descrita na prova da escolha gulosa e NÃO altera o peso $x^* \cdot w$ nem o valor $x^* \cdot v$ de x^*.

Ao fim da execução, ambas soluções são idênticas, o que prova que a solução gulosa construída x é ótima.

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x							
x^*	0	1	1/3	1/3	0	0	1

$W = 95$

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7	W = 95
w	10	30	60	15	20	30	40	
v	100	600	1200	300	400	600	1000	
x							?	
x^*	0	1	1/3	1/3	0	0	1	

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x							1
x^*	0	1	1/3	1/3	0	0	1

W = 95

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x						?	1
x^*	0	1	1/3	1/3	0	0	1

$W = 55$

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x						1	1
x^*	0	1	1/3	1/3	0	0	1

$W = 55$

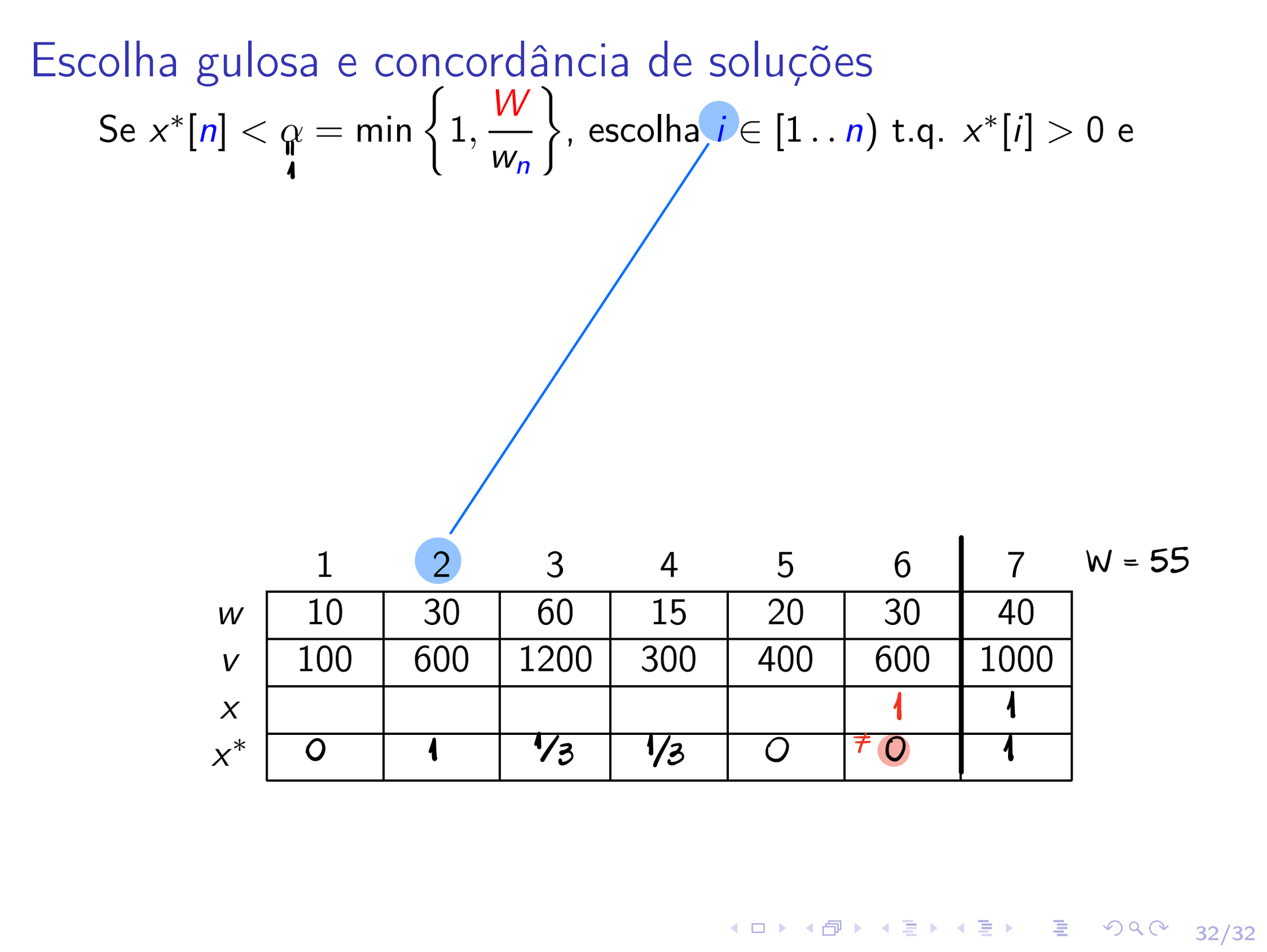
Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x						1	1
x^*	0	1	1/3	1/3	0	$\neq$ 0	1

W = 55

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e



	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x						1	1
x^*	0	1	1/3	1/3	0	$\neq$ 0	1

W = 55

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e

tome $\delta := \min\left\{x^*[i], (\alpha - x^*[n])\dfrac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\dfrac{w_i}{w_n}$.

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x						1	1
x^*	0	1	1/3	1/3	0	≠ 0	1

W = 55

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \dfrac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e

tome $\delta := \min\left\{x^*[i], (\alpha - x^*[n])\dfrac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\dfrac{w_i}{w_n}$.

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} x^*[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ x^*[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ x^*[n] + \beta & \text{se } j = n. \end{cases}$$

$W = 55$

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x						1	1
x^*	0	1 ↓δ	1/3	1/3	0	≠ 0 ↑β	1
x'	0	0	1/3	1/3	0	1	1

Escolha gulosa e concordância de solucões

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					?	1	1
x^*	0	0	1/3	1/3	0	1	1

$W = 25$

Escolha gulosa e concordância de solucões

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3	1/3	0	1	1

W = 25

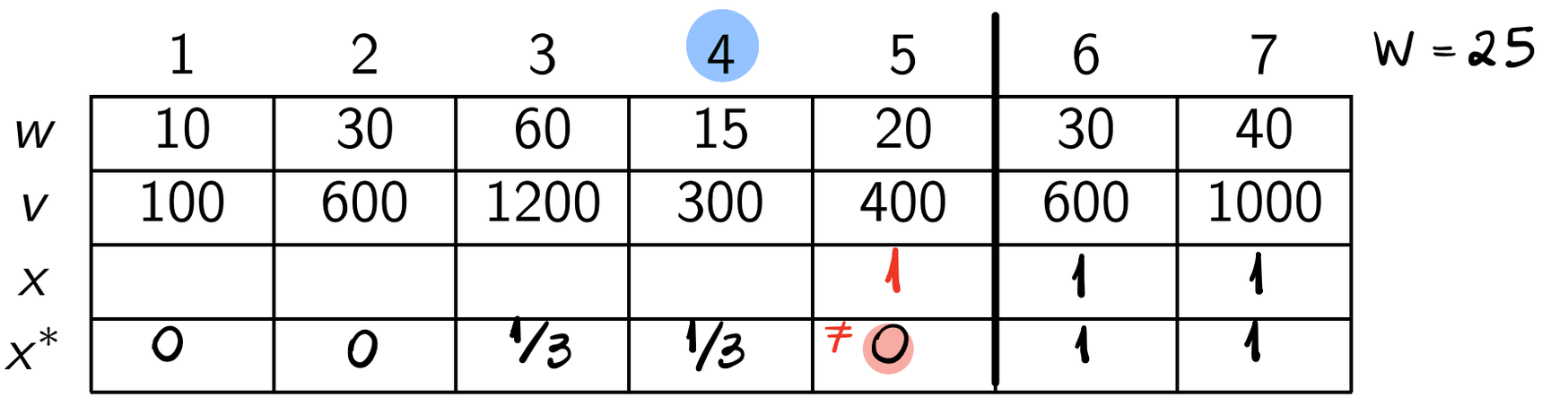
Escolha gulosa e concordância de solucões

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3	1/3	$\neq 0$	1	1

$W = 25$

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e



	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3	1/3	≠ 0	1	1

W = 25

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e

tome $\delta := \min\left\{x^*[i], (\alpha - x^*[n])\frac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\frac{w_i}{w_n}$.

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3	1/3	≠ 0	1	1

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e

tome $\delta := \min\left\{x^*[i], (\alpha - x^*[n])\frac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\frac{w_i}{w_n}$.

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} x^*[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ x^*[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ x^*[n] + \beta & \text{se } j = n. \end{cases}$$

$W = 25$

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3	1/3	0	1	1
x'	0	0	1/3	0	1/4	1	1

Escolha gulosa e concordância de solucões

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3	0	1/4	1	1

$W = 25$

Escolha gulosa e concordância de solucões

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3	0	≠ 1/4	1	1

W = 25

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e

tome $\delta := \min\left\{x^*[i], (\alpha - x^*[n])\frac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\frac{w_i}{w_n}$. $= \frac{3}{4}$

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} x^*[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ x^*[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ x^*[n] + \beta & \text{se } j = n. \end{cases}$$

$W = 25$

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/3 ↓δ	0	≠ 1/4 ↑β	1	1
x'	0	0	1/12	0	1	1	1

Escolha gulosa e concordância de solucões

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x					1	1	1
x^*	0	0	1/12	0	1	1	1

$W = 25$

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x				?	1	1	1
x^*	0	0	1/12	0	1	1	1

$W = 5$

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x				1/3	1	1	1
x^*	0	0	1/12	0	1	1	1

$W = 5$

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x				1/3	1	1	1
x^*	0	0	1/12	≠ 0	1	1	1

W = 5

Escolha gulosa e concordância de soluções

Se $x^*[n] < \alpha = \min\left\{1, \frac{W}{w_n}\right\}$, escolha $i \in [1\,..\,n)$ t.q. $x^*[i] > 0$ e

tome $\delta := \min\left\{x^*[i], (\alpha - x^*[n])\frac{w_n}{w_i}\right\}$ e $\beta := \delta\,\frac{w_i}{w_n}$.

Defina $x'[1\,..\,n]$ tal que

$$x'[j] := \begin{cases} x^*[j] & \text{se } j \neq i \text{ e } j \neq n, \\ x^*[i] - \delta & \text{se } j = i, \\ x^*[n] + \beta & \text{se } j = n. \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x							
x^*							
x'							

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x	?	?	?	1/3	1	1	1
x^*	0	0	0	1/3	1	1	1

W = 0

Escolha gulosa e concordância de soluções

	1	2	3	4	5	6	7
w	10	30	60	15	20	30	40
v	100	600	1200	300	400	600	1000
x	0	0	0	1/3	1	1	1
x^*	0	0	0	1/3	1	1	1

W = 0