Recorrências e arredondamento

Notas preparadas pelo Prof. Arnaldo Mandel

Recorrências e arredondamento

Divisão e conquista leva a recorrências como:

Recorrências e arredondamento

Divisão e conquista leva a recorrências como:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \\
T(n) &= 3\,T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2 \\
T(n) &= T(\sqrt{n}) + n
\end{aligned}
$$

Recorrências e arredondamento

Divisão e conquista leva a recorrências como:

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n \\ T(n) &= 3\,T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n^2 \\ T(n) &= T(\sqrt{n}) + n \end{aligned}$$

Em geral:

$$T(n) = g_1(n)T(h_1(n)) + \cdots + g_k(n)T(h_k(n)) + f(n)$$

onde, para todo i, $0 \leq h_i(n) < n$, tudo para $n \geq n_0$ (algum n_0 dado). Os valores iniciais $T(0), T(1), \ldots, T(n_0 - 1)$ também são dados.

Números especiais

Às vezes existe uma sequência de inteiros

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

que são especiais para essa recorrência, no sentido que para todos i, k

$$h_i(n_k) = n_{k-1}$$

Números especiais

Às vezes existe uma sequência de inteiros

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

que são especiais para essa recorrência, no sentido que para todos i, k

$$h_i(n_k) = n_{k-1}$$

E aí temos a recorrência

$$T(n_k) = \left[g_1(n_k) + \cdots + g_k(n_k)\right] T(n_{k-1}) + f(n_k)$$

que pode ser mais fácil de resolver, definindo $t(k) = T(n_k)$.

Números especiais

Às vezes existe uma sequência de inteiros

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

que são especiais para essa recorrência, no sentido que para todos i, k

$$h_i(n_k) = n_{k-1}$$

E aí temos a recorrência

$$T(n_k) = \left[g_1(n_k) + \cdots + g_k(n_k)\right] T(n_{k-1}) + f(n_k)$$

que pode ser mais fácil de resolver, definindo $t(k) = T(n_k)$.

No que essa solução particular ajuda o caso geral?

Simplifica

Podemos agora substituir a recorrência em n por uma em k

Simplifica

Podemos agora substituir a recorrência em n por uma em k

escrevemos

$$t(k) = T(n_k) \qquad h(k) = f(n_k) \qquad g(k) = g_1(n_k) + \cdots + g_k(n_k).$$

Simplifica

Podemos agora substituir a recorrência em n por uma em k

escrevemos

$$t(k) = T(n_k) \qquad h(k) = f(n_k) \qquad g(k) = g_1(n_k) + \cdots + g_k(n_k).$$

Assim,

$$T(n_k) = \left[g_1(n_k) + \cdots + g_k(n_k)\right] T(n_{k-1}) + f(n_k)$$

vira

$$t(k) = g(k)\, t(k-1) + h(k)$$

que pode ser muito mais fácil de resolver.

Uma hipótese

Suponha que:

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

todas as funções g_i, h_i, f são não decrescentes,
e $g_i(n) \geq 0$.

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

todas as funções g_i, h_i, f são não decrescentes,
e $g_i(n) \geq 0$.

Então, segue por indução que

Uma hipótese

Suponha que:

Para $n > n_0$,

todas as funções g_i, h_i, f são não decrescentes,
e $g_i(n) \geq 0$.

Então, segue por indução que

$T(n)$ é não decrescente,
desde que isso valha para $n < n_0$.

Do particular para o geral

Defina

$$\begin{aligned} S(n) &= \min\{n_k \mid n_k \geq n\} \\ L(n) &= \max\{n_k \mid n_k \leq n\} \end{aligned}$$

Do particular para o geral

Defina

$$\begin{aligned} S(n) &= \min\{n_k \mid n_k \geq n\} \\ L(n) &= \max\{n_k \mid n_k \leq n\} \end{aligned}$$

Então, segue imediatamente que

$$T(L(n)) \leq T(n) \leq T(S(n))$$

Exemplo, do MergeSort

$$T(1) = 0, \qquad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

Exemplo, do MergeSort

$$T(1) = 0, \qquad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

$$g_1(n) = g_2(n) = 1, \quad h_1(n) = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor, \quad h_2(n) = \lceil \tfrac{n}{2} \rceil, \quad f(n) = cn$$

Exemplo, do MergeSort

$$T(1) = 0, \qquad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

$$g_1(n) = g_2(n) = 1, \quad h_1(n) = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor, \quad h_2(n) = \lceil \tfrac{n}{2} \rceil, \quad f(n) = cn$$

Números especiais:

$$n_k = 2^k$$

Exemplo, do MergeSort

$$T(1) = 0, \qquad T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + cn$$

$$g_1(n) = g_2(n) = 1, \quad h_1(n) = \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor, \quad h_2(n) = \lceil \tfrac{n}{2} \rceil, \quad f(n) = cn$$

Números especiais:

$$n_k = 2^k$$

Então,

$$t(0) = 0, \qquad t(k) = 2\,t(k-1) + c\,2^k$$

E, pelo método da substituição:

$$t(k) = c\,2^k\,k = c\,n_k\,\lg n_k$$

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \leq c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \leq c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \leq 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \leq c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \leq 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Como $L(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$, um argumento análogo leva a

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \leq c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \leq 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Como $L(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$, um argumento análogo leva a

$$T(n) \geq \frac{1}{2}\, n(\lg n - 1)$$

de onde segue que

Completando

Neste caso, $S(n) = 2^{\lceil \lg n \rceil}$, logo

$$T(n) \leq c\, 2^{\lceil \lg n \rceil} \lceil \lg n \rceil$$

Mas $\lceil \lg n \rceil < \lg n + 1$, logo, $2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$ e

$$T(n) \leq 2cn(\lg n + 1) = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Como $L(n) = 2^{\lfloor \lg n \rfloor}$, um argumento análogo leva a

$$T(n) \geq \frac{1}{2}\, n(\lg n - 1)$$

de onde segue que

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$