MAT 2464 - Cálculo II - IMEUSP

LISTA 7

POLINÔMIO DE TAYLOR DE ORDENS 1 E 2 -

FÓRMULA DE TAYLOR COM RESTO DE LAGRANGE

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2025

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado. [Exerc. 15.4 (1)- livro texto.]
   a) $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$
   b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1,1)$
   c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0,0)$

2. Sejam $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(0,0)$. [Exerc. 15.4 (2) - livro texto.]

   a) Mostre que para todo (x,y) ,com $|x + 5y| < 1$,

   $$|e^{x+5y} - P_1(x,y)| \leq \frac{3}{2}(x + 5y)^2.$$

   b Avalie o erro que se comete na aproximação

   $$e^{x+5y} \approx P_1(x,y), \text{ para } x = 0,01 \text{ e } y = 0,01.$$

3. [Exerc. 15.4 (3) - livro texto.] Sejam $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1,1)$. Mostre que para todo (x,y), com $|x-1| < 1$ e $|y-1| < 1$, temos

   $$|f(x,y) - P_1(x,y)| < 7(x-1)^2 + 6(y-1)^2.$$

4. [Exercício 15.4 (4) - livro texto.] Sejam $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(1,1)$.

   a) Utilizando $P_1(x,y)$, calcule um valor aproximado para $f(x,y)$, sendo $x = 1,001$ e $y = 0,99$.

   b) Avalie o erro que se comete na aproximação do item a).

5* **Fórmula de Taylor de ordem 1, com resto de Lagrange.**
Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de classe C^2. Sejam x e x_0 em (a,b). Então, existe um ponto intermediário $\overline{x}$, entre x e x_0, satisfazendo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\overline{x})}{2}(x-x_0)^2.$$

O polinômio, de grau menor ou igual a 1, dado por

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

é o **Polinômio de Taylor de ordem** 1 de f, en torno de x_0.

6* **Fórmula de Taylor de ordem 2, com resto de Lagrange.**
Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de classe C^3. Sejam x e x_0 em (a,b). Então, existe um ponto intermediário $\overline{x}$ entre x e x_0 satisfazendo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(\overline{x})}{3!}(x-x_0)^3.$$

O polinômio, de grau menor ou igual a 2, dado por

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2,$$

é o **Polinômio de Taylor de ordem** 2 de f, en torno de x_0.

7* **Fórmula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange.**
Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Sejam x e x_0 em (a,b). Então, existe um ponto $\overline{x}$, entre x e x_0, satisfazendo

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(\overline{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

O polinômio de grau menor ou igual a n e dado por

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

é o **Polinômio de Taylor de ordem** n de f, en torno do ponto x_0.

8* [Exerc. 15.4 (5) - livro texto.] Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de $f(x, y)$ e suponha que f seja de classe C^2 na bola aberta B de centro (x_0, y_0). Prove que para todo (x, y) em B, existe $(\overline{x}, \overline{y})$ interno ao segmento de extremidades (x_0, y_0) e (x, y) tal que

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overline{x},\overline{y})(x-x_0)(y-y_0) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{x},\overline{y})(y-y_0)^2\Big]. \end{aligned}$$

9* [Exerc. 15.4 (6) - livro texto.] Seja

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + m,$$

onde a, b, c, d, e e m são constantes. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Prove que para todo (h, k) temos

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = ah^2 + bhk + ck^2.$$

10* [Exerc. 15.4 (7) - livro texto.] Sejam $f = f(x, y)$ e (x_0, y_0) como no exercício anterior. Prove que se $a > 0$ e $b^2 - 4ac < 0$, então

$$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0), \quad \text{para todo } (h,k) \neq (0,0).$$

Como é o gráfico de f?

11. [Exerc. 15.5 (1) - livro texto.] Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 da função dada, em volta do ponto (x_0, y_0) dado.

(a) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(b) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3y^3 + x - y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

MÁXIMOS E MÍNIMOS

12* *Consideremos* $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$, *onde* $Dom(f)$ *é um subconjunto de* $\mathbb{R}^2$.

- *Seja* A *um subconjunto do domínio de* f *e seja* $(x_0, y_0) \in A$. *O ponto* (x_0, y_0) *é um* **ponto de máximo** *de* f *em* A *se temos*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x, y) \in A.$$

  O número $f(x_0, y_0)$ *é o* **valor máximo** *de* f *em* A.

  Analogamente para **ponto de mínimo** *e* **valor mínimo**, *de* f *em* A.

- *Um ponto* $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ *é* **ponto de máximo global** *ou* **ponto de máximo absoluto** *de* f *se temos*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x, y) \in Dom(f).$$

  Então, $f(x_0, y_0)$ *é o* **valor máximo** *de* f.

  Analogamente definimos **ponto de mínimo global**, *ou* **ponto de mínimo absoluto**, *e* **valor mínimo** *de* f.

- *O ponto* $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ *é um* **ponto de máximo local** *de* f *se existir uma bola aberta* B, *de centro* (x_0, y_0), *tal que temos*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x, y) \in B \cap Dom(f).$$

  Analogamente definimos **ponto mínimo local** *de* f.

- *Os pontos de máximo e mínimo de* f *são ditos* **extremantes** *de* f.

- *Os pontos de máximo e mínimo locais de* f *são* **extremantes locais**.

- *Um ponto* (x_0, y_0) *é um* **ponto interior** *de* $Dom(f)$ *se existe uma bola aberta* B, *de centro* (x_0, y_0) *e raio* $r > 0$, *tal que* $B \subset Dom(f)$.

- *Seja* (x_0, y_0) *um ponto interior de* $Dom(f)$, *com* f *diferenciável em* (x_0, y_0). *Então,* $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ *é um* **ponto crítico** *ou* **ponto estacionário** *de* f *se* $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

- *Um ponto* (x_0, y_0) *é um* **ponto de sela** *de* f, *se* (x_0, y_0) *é um ponto crítico de* f *tal que* (x_0, y_0) *não é nem um ponto de máximo local nem um ponto de minimo local de* f.

- *Um ponto* $(x_0, y_0) \in A$, *que não é ponto interior de* A *é denominado* **ponto de fronteira** *de* A.

13* Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ diferenciável e (x_0, y_0) um ponto interior de $Dom(f)$ que é um ponto de máximo local, ou mínimo local, de f. Mostre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

14* Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de $Dom(f)$. Uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja **ponto de máximo local** de f é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Interprete geometricamente.

15* Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior de $Dom(f)$. Uma *condição necessária* para que (x_0, y_0) seja **ponto de mínimo local** de f é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0 \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0.$$

Interprete geometricamente.

16. [Exerc. 16.2 - livro texto.] Selecione os candidatos a extremantes locais.

1. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$
2. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 3xy - x + y$
3. $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy + 5$
4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$
5. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x + 4y$
6. $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$

17* *Seja $f : Dom(f) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Definimos o* **hessiano** *(também dito* **determinante hessiano***) de f por*

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Note que

$$H(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)\right]^2.$$

18* **Teorema.** *Sejam $f = f(x,y)$ de classe C^2 e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto interior de $Dom(f)$. Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f.*

a) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0$ e $H(P_0) > 0$, então P_0 é ponto de mínimo local de f.

b) Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) < 0$ e $H(P_0) > 0$, então P_0 é ponto de máximo local de f.

c) Se $H(P_0) < 0$, então P_0 não é extremante local e é um ponto de sela.

d) Se $H(P_0) = 0$, nada se pode afirmar.

19. Estude com relação a máximos e mínimos locais as funções abaixo.
Vide Exerc. 16.3 (1) - livro texto.

a) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 6x + 2y$
b) $x^2 + y^3 + xy - 3x - 4y + 5$
c) $x^3 + 2xy + y^2 - 5x$
d) $-x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 2y$
e) $x^3 - 3x^2y + 27y$
f) $x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 3y + 1$
g) $\sqrt[3]{x^2 + 2xy + 4y^2 - 6x - 12y}$
h) $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2$
i) $x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$
j) $x^4 + y^4 + 4x + 4y$
l) $x^5 + y^5 - 5x - 5y$
m) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + xy$, $x > 0$ e $y > 0$.

20* [Exerc. 16.3 (2) - livro texto.] Seja $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, com $\{a, b, c, d, e, l\} \subset \mathbb{R}$. Mostre que os extremantes locais de f são globais.

21. Estude com relação a extremantes globais as funções abaixo.
Vide Exerc. 16.3 (3) - livro texto.

a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + 2y$
b) $x^2 - y^2 - 3xy + x + 4y$
c) $x + 2y - 2xy - x^2 - 3y^2$
d) $3x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y$
e) $x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + 2y$
f) $x^2 + y^2 - 2x - 4y$

22. Determine o ponto do plano $x + 2y - z = 4$ que é mais próximo da origem.
Vide Exerc. 16.3 (4) - livro texto.

23. Considere as retas reversas r e s de equações

$$\begin{cases} r : (x,y,z) = (0,0,2) + \lambda(1,2,0), \lambda \in \mathbb{R}, \\ s : (x,y,z) = (0,0,4) + \mu(1,1,1), \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Determine P e Q, com $P \in r$ e $Q \in s$, de modo que a distância de P a Q seja a menor possível. [Exerc. 16.3 (8) - livro texto.]

24. Determine o ponto do plano $3x + 2y + z = 12$ cuja soma dos quadrados das distâncias a $(0,0,0)$ e $(1,1,)$ seja mínima.[Exerc. 16.3 (13) - livro texto.]

MÁXIMOS E MÍNIMOS SOBRE COMPACTOS

25* *Seja* $A \subset \mathbb{R}^2$.

- A *é* **limitado** *se* A *está contido em alguma bola centrada na origem.*
- A *é* **fechado** *se seu complementar* $\{(x,y) : (x,y) \notin A\}$ *é aberto.*
- A *é* **compacto** *se* A *é fechado e limitado.*

26* **Teorema de Weierstrass.** *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *contínua, com* A *compacto. Então,* f *assume um valor máximo e um valor mínimo em* A*. Isto é, existem* $(x_1, y_1) \in A$ *e* $(x_2, y_2) \in A$ *tais que, com* $m = f(x_1, y_1)$ *e* $M = f(x_2, y_2)$*, temos*

$$m \leq f(x,y) \leq M, \text{ para todo } (x,y) \in A.$$

27. Estude a função dada com relação a máximo e mínimo no conjunto dado. Vide Exerc. 16.4 (1) - livro texto.

    (a) $f(x,y) = 3x - y$ no conjunto A de todos os pontos (x,y) satisfazendo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y - x \leq 3$, $x + y \leq 4$ e $3x + y \leq 6$.

    (b) $f(x,y) = 3x - y$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

    (c) $f(x,y) = x^2 + 3xy - 3x$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 1\}$.

    (d) $f(x,y) = xy$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } 2x + y \leq 5\}$.

    (e) $f(x,y) = y^2 - x^2$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

    (f) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ em $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

28. Determine (x,y), com $x^2 + 4y^2 \leq 1$, que maximiza a soma $2x + y$. [Exerc. 16.4 (2) – livro texto.]

29. Suponha que $T(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x \text{ e } 2y + x \leq 4\}$. Determine o ponto de A de menor temperatura. [Exerc. 16.4 (3) – livro texto.]

30. Ache o valor máximo de $f(x,y) = x + 5y$, com x e y sujeitas às restrições: $5x + 6y \leq 30$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. [Exerc. 16.4 (4) – livro texto.]

31. Determine (x,y) que maximiza (minimiza) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, com x e y sujeitas às restrições: $y \leq 1 - 2x$ e $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. [Exerc. 16.4 (6) – livro texto.]

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

32* **Teorema (Primeiro).** *Seja $f = f(x,y)$ diferenciável no aberto A e seja $C = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$, com g de classe C^1 no aberto A e $\vec{\nabla} g(x,y) \neq \vec{0}$, para todo $(x,y) \in C$. Se $(x_0,y_0) \in C$ é um extremante local de f em C, então existe um escalar λ tal que temos*

$$\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0,y_0).$$

O escalar λ é dito um *multiplicador de Lagrange*. Os **candidatos a extremantes locais de f na curva** C são os pontos (x,y) satisfazendo

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Eliminando λ (é possível), e se preferir, basta resolver o sistema com duas incógnitas

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

33* **Teorema (Segundo).** *Seja $f = f(x,y,z)$ uma função diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja $S = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$, com g de classe C^1 no aberto A e $\vec{\nabla} g(x,y,z) \neq \vec{0}$, para todo $(x,y,z) \in S$. Se $(x_0,y_0,z_0) \in S$ é um extremante local de f em S, então existe um escalar λ tal que temos*

$$\vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0).$$

O escalar λ é dito um *multiplicador de Lagrange*. Os **candidatos a extremantes locais de f na superfície** S são os pontos (x,y,z) satisfazendo

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Eliminando λ (é possível), e se preferir, basta resolver o sistema com quatro equações e três incógnitas

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

34* **Teorema (Terceiro).** *Seja $f(x,y,z)$ diferenciável no aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ e seja $C = \{(x,y,z) \in A : g(x,y,z) = 0 \text{ e } h(x,y,z) = 0\}$, com g e h de classe C^1 no aberto A e com $\overrightarrow{\nabla} g(x,y,z) \times \overrightarrow{\nabla} h(x,y,z) \neq \overrightarrow{0}$ em C. Nestas condições, se $(x_0,y_0,z_0) \in C$ é um extremante local de f em C, então existem escalares λ_1 e λ_2 tais que*

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) = \lambda_1 \overrightarrow{\nabla} g(x_0,y_0,z_0) + \lambda_2 \overrightarrow{\nabla} h(x_0,y_0,z_0).$$

"Os escalares λ_1 e λ_2 são ditos multiplicadores de Lagrange. Os **candidatos a extremantes locais de f na curva** C são os pontos (x,y,z) satisfazendo o sistema (com cinco equações e cinco incógnitas)

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g(x,y,z) + \lambda_2 \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Eliminando λ (é possível), e se preferir, basta resolver o sistema (com três equações e três incógnitas)

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix} = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0." \end{cases}$$

35. Estude com relação a máximos e mínimos a função $f = f(x,y)$ dada com as restrições dadas. [Exerc. 16.5 (1) - livro texto.]

a) $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 = 1$

b) $f(x,y) = 3x + y$ e $x^2 + 2y^2 \leq 1$

c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ e $3x + y = 1$

d) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ e $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$

e) $f(x,y) = xy$ e $x^2 + 4y^2 = 8$

f) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ e $x + 2y - 1 = 0$

g) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ e $x^2 + y^2 = 1$

h) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ e $x^2 + y^2 - 2x = 0$

i) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ e $x + 2y = 3$

j) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ e $x^2 + 2y^2 = 1$.

36. Ache a curva de nível de $f(x,y) = x^2 + 16y^2$ que é tangente à curva $xy = 1$, $x > 0$ e $y > 0$. Qual o ponto de tangência? [Exerc. 16.5 (2) - livro texto.]

37. Ache o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máximo. Vide Exerc. 16.5 (3) - livro texto.

38. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ que é mais próximo de $(14, 1)$. Vide Exerc. 16.5 (4) - livro texto.

39. Ache o ponto do elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ que maximiza a soma $x + 2y + z$. Vide Exerc. 16.5 (5) - livro texto.

40. Determine a superfície de nível da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ que seja tangente ao plano $x + 2y + 3z = 4$. [Exerc. 16.5 (6) - livro texto.]

41. Ache o valor máximo e o valor mínimo da função $f(x,y,z) = x + 2y + z$ com a restrição $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$. [Exerc. 16.5 (7) - livro texto.]

42. Determine o ponto do plano $x + 2y - 3z = 4$ mais próximo da origem. Vide Exerc. 16.5 (8) - livro texto.

43. Determine o ponto da reta $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$ que se encontra mais próximo da origem. [Exerc. 16.5 (9) - livro texto.]

44. Maximize $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$. [Exerc. 16.5 (10) - livro texto.]

45. Ache os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ (centro $(0,0)$) mais próximos e os mais afastados da origem. Desenhe a elipse. [Exerc. 16.5 (11) - livro texto.]

46. Ache o ponto da curva $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ mais próximo da origem. Vide Exerc. 16.5 (12) - livro texto.

47. Encontre os pontos da curva $x^2 - 6xy - 7y^2 + 80 = 0$ mais próximos da origem. Desenhe a curva. [Exerc. 16.5 (13) - livro texto.]

48. Determine o ponto da superfície $xyz = 1$, $x > 0$ e $y > 0$, que se encontra mais próximo da origem. [Exerc. 16.5 (14) - livro texto.]