MAT 2464 - Cálculo II - IMEUSP

Lista 6 - REGRA DA CADEIA- TEOREMA DA FUNÇÃO IMPLÍCITA - GRADIENTE - DERIVADA DIRECIONAL

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2025

1. Cálcule $\frac{dz}{dt}$ diretamente e pela regra da cadeia. [Exerc. 12.1 (1)- livro texto.]

   a) $z = \operatorname{sen} xy$, $x = 3t$ e $y = t^2$ b) $z = x^2 + 3y^2$, $x \operatorname{sen} t$ e $y = \cos t$

   c) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $x \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 3t$

2. [Exerc. 12.1 (2) - livro texto.] Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$.

   a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   b Calcule $g'(0)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{1}{3}$.

3. [Exerc. 12.1 (3) - livro texto.]
   Expresse $\frac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $z = f(x, y)$ e

   a) $x = t^2$ e $y = 3t$ b) $x = \operatorname{sen} 3t$ e $y = \cos 2t$

4. Suponha $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$, para todo t. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.
   [Exercício 12.1 (4) - livro texto.]

5. [Exerc. 12.1 (5) - livro texto.] Suponha $f(3x, x^3) = \arctan x$, para todo x.

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ admitindo $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$.

   b) Ache a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.

6. [Exerc. 12.1 (6) - livro texto.] Admita $4y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2$, $\forall (x, y)$.
   Calcule $g'(t)$, sendo $g(t) = f(2\cos t, \operatorname{sen} t)$.

7. [Exerc. 12.1 (7) - livro texto.] Admita $4y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, $\forall (x, y)$.
   Prove que f é constante sobre a elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

8. A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2,1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$. [Exerc. 12.1 (8) - livro texto.]

9. Suponha $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, $\forall\,(x,y)$.][Exerc. 12.1 (9) - livro texto.] Mostre que $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$, com $t > 0$, é constante.

10. Seja $z = f(u + 2v, u^2 - v)$. [Exerc. 12.1 (10) - livro texto.]
Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

11. Seja $z = t^2 f(x,y)$, onde $x = t^2$ e $y = t^3$.[Exerc. 12.1 (14) - livro texto.] Expresse $\frac{dz}{dt}$ em termos das derivadas parciais de f.

12* Seja $g = g(x)$ diferenciável, com $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in D_g = Dom(g)$. [Exerc. 12.1 (18) - livro texto.] Mostre a fórmula

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}, \text{ para todo } x \in D_g \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0.$$

13. Sejam $f = f(t)$ e $g = g(x,y)$ diferenciáveis, com $g(t, f(t)) = 0$, para todo t. [Exerc. 12.1 (19) - livro texto.] Suponha

$$f(0) = 0,\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = 2 \text{ e } \frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 4.$$

Ache a equação da reta tangente a $\gamma(t) = (t, f(t))$ no ponto $\gamma(0)$.

14. Sejam $f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y)$ diferenciáveis, com $f(x, y, g(x,y)) = 0$ para todo $(x,y) \in Dom(g)$. [Exerc. 12.1 (20) - livro texto.] Suponha

$$g(1,1) = 3,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,3) = 2,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,3) = 5 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,3) = 10.$$

Ache a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,3)$.

15. Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$, com $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 4$. [Exerc. 12.1 (21) - livro texto]

    (a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

    (b) Calcule $g'(0)$.

FUNÇÕES IMPLÍCITAS

16. A equação $y^3+xy+x^3 = 4$ define implicitamente alguma função diferenciável $y = y(x)$? Se sim, dê $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y. [Exerc. 12.2 (1) - livro texto] **Dica:** considere o ponto $(0, \sqrt[3]{4})$ e use o teorema das funções implícitas.

17. Mostre que cada uma das equações abaixo define implicitamente ao menos uma função diferenciável $y = y(x)$. Expresse $\frac{dy}{dx}$ em termos de x e y. [Exercício 12.2 (2) - livro texto]

    a) $x^2y + \operatorname{sen} y = x$ b) $y^4 + x^2y^2 + x^4 = 3$.

18. Mostre que cada uma das equações abaixo define implicita/e ao menos uma função diferenciável $z = z(x, y)$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y, e z. [Exerc. 12.2 (3) - livro texto.]

    a) $e^{x+y+z} + xyz = 1$ b) $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$

19. Sejam $u(x, y) = x + y$ e $v(x, y) = \frac{y}{x}$. Ache o determinante jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$. [Exercício 12.2 (10) - livro texto.]

20. Calcule os determinantes jacobianos [Exercício 12.2 (11) - livro texto].

    (a) $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}$ sendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ e $G(x, y, z) = x + y + z$.

    (b) $\frac{\partial(u,v)}{\partial(y,z)}$ sendo $u = xyz$ e $v = x^3 + y^2$.

    (c) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

    (d) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}$ sendo $x = r + 3s + t^2$ e $y = r^2 - s^2 - 3t^2$.

GRADIENTE E DERIVADA DIRECIONAL

21. É dada uma curva γ que passa por $\gamma(t_0) = (1, 3)$ e com imagem na curva de nível $x^2 + y^2 = 10$. Suponha $\gamma'(t_0) \neq \overrightarrow{0}$. [Exerc. 13.1 (1) - livro texto]

    (a) Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 3)$.

    (b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as equações acima.

22. Ache a equação da reta tangente à curva γ no ponto $\gamma(t_0) = (2,5)$, com $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$, e que a sua imagem está contida na curva de nível $xy = 10$. Dê a equação da reta normal a γ neste ponto. [Exerc. 13.1 (2) - livro texto]

23. Ache a equação da reta tangente à curva de nível dada, no ponto dado. [Exerc. 13.1 (3) - livro texto.]

    a) $x^2 + xy + y^2 - 3y = 1$ em $(1,2)$ b) $e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

24. Determine uma reta tangente à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ e paralela à reta $2x + y = 5$. [Exerc. 13.1 (4) - livro texto.]

25. Ache uma reta tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$. [Exerc. 13.1 (5) - livro texto.]

26. Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície dada, no ponto dado. [Exerc. 13.2 (1) - livro texto.]

    (a) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 8$ em $(1,-1,1)$.

    (b) $2xyz = 3$ em $\left(\frac{1}{2}, 1, 3\right)$.

    (c) $ze^{x-y} + z^3 = 2$ em $(2,2,1)$.

27. Seja $z = f(x,y)$ dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = 10$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,f(1,1))$. [Exerc. 13.2 (2) - livro texto.]

28. Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$. [Exerc. 13.2 (3) - livro texto.]

29. Seja $z = f(x,y)$, diferenciável e com gráfico na superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sabe-se que $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. [Exerc. 13.2 (4) - livro texto.]

30. Admita que a imagem da curva γ está contida na intersecção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$. Suponha $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ e $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$. Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$. [Exerc. 13.2 (5) - livro texto.]
    Determine uma curva satisfazendo as condições acima.

31. A imagem da curva γ está contida na intersecção da superfície cilíndrica $x^2+y^2=2$ com a superfície esférica $x^2+y^2+z^2=3$. Suponha $\gamma(t_0)=(1,1,1)$ e $\gamma'(t_0)\neq\overrightarrow{0}$. [Exerc. 13.2 (6) - livro texto.]

    (a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

    (b) Determine uma curva $\gamma(t)$ satisfazendo as condições acima.

32. É dada uma curva γ cuja imagem é a intersecção das superfícies $4x^2+y^2=1$ e $x+y+z=1$. Suponha que temos as condições $\gamma(t_0)=(0,1,0)$ e $\gamma'(t_0)\neq\overrightarrow{0}$. [Exerc. 13.2 (7) - livro texto.]

    (a) Determine a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$.

    (b) Determine uma parametrização para γ.

33. Considere a função $z=\frac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}$. [Exerc. 13.2 (8) - livro texto.]

    (a) Determine uma função $F(x,y,z)$ que não envolva radicais, tal que a função dada seja definida implicitamente pela equação $F(x,y,z)=0$.

    (b) Determine o plano tangente ao gráfico de $z=z(x,y)$ no ponto $(2,2,1)$.

34. Ache a equação do plano normal, em $(1,2,3)$, à intersecção das superfícies $x^2+y^2+z^2=14$ e $xyz=6$. [Exerc. 13.2 (9) - livro texto.]

35. Determine um plano que passe pelos pontos $(5,0,1)$ e $(1,0,3)$ e que seja tangente à superfície $x^2+2y^2+z^2=7$. [Exerc. 13.2 (10) - livro texto.]

36. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(x_0,y_0)$. [Exerc. 13.4 (1) - livro texto]

    (a) $f(x,y)=x^2-3y^2$, $(x_0,y_0)=(1,2)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.

    (b) $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$, $(x_0,y_0)=(1,1)$ e $\overrightarrow{u}$ o versor de $(3,4)$.

    (c) $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$, $(x_0,y_0)=(3,3)$ e $\overrightarrow{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

37. Em que direção e sentido f cresce mais rapidamente no ponto dado? E em que direção e sentido decresce mais rapida/e?[Exerc. 13.4 (2) - livro texto]

    (a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ em $(1,1)$.

    (b) $f(x,y)=\ln\|(x,y)\|$ em $(1,-1)$.

    (c) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-2y^2}$ em $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

38. Seja $f(x,y) = x \arctan \frac{x}{y}$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, com $\vec{u}$ na direção e sentido de máximo crescimento de f, no ponto $(1,1)$. [Exerc. 13.4 (3) - livro texto.]

39. Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ no ponto $(2,2)$ e na direção dada. [Exerc. 13.4 (4) - livro texto.]

    a) $\vec{v} = (1,2)$ b) $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

40. Calcule a derivada direcional de $f(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2}$, no ponto $(-1,1)$ e na direção $2\vec{i} + 3\vec{j}$. [Exerc. 13.4 (5) - livro texto.]

41. Uma função diferenciável $f(x,y)$ tem, no ponto $(1,1)$, derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$, e igual a -1 na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule [Exerc. 13.4 (6) – livro texto.]

    a) $\nabla f(1,1)$ b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ onde $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$

42. Ache a derivada direcional da função dada, no ponto e direção $\vec{w}$ indicados. [Exerc. 13.4 (15) - livro texto.]

    (a) $f(x,y,z) = xyz$ em $(1,1,1)$ e na direção $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

    (b) $f(x,y,z) = x^2 + xy + z^2$ em $(1,2,-1)$ e na direção $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

43. A função diferenciável $f(x,y,z)$ tem, no ponto $(1,1,1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção $-4\vec{i} + 3\vec{j}$, e igual a 0 na direção $\vec{j}$. Calcule o valor máximo de [Exerc. 13.4 (16) - livro texto]

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1,1).$$