MAT 2464 - Cálculo II - IMEUSP

Lista 5 - DIFERENCIABILIDADE.

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2025

1. Prove que f é diferenciável. [Exercício 11.1 (1)- Guidorizzi, 5ª ed., V. 2.]

   a) $f(x,y) = xy$ b) $f(x,y) = x + y$ c) $f(x,y) = x^2y^2$

   d) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ e) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ f) $f(x,y) = x^2 + y^2$

2. f é diferenciável em $(0,0)$? [Exerc. 11.1 (2) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

   b $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$.

3. Mostre que f é diferenciável. [Exerc. 11.2 (1) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   a) $f(x,y) = e^{x-y^2}$ b) $f(x,y) = x^4 + y^3$

   c) $f(x,y) = x^2y$ d) $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$

4. Ache o conjunto dos pontos em que a função dada é diferenciável. Justifique. [Exercício 11.2 (2) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

5. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada, no ponto dado. [Exercício 11.3 (1) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   a) $f(x,y) = 2x^2y$ em $(1,1,f(1,1))$.

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ em $(0,1,f(0,1))$.

   c) $f(x,y) = 3x^3y - xy$ em $(1,-1,f(1,-1))$.

   d) $f(x,y) = xe^{x^2-y^2}$ em $(2,2,f(2,2))$.

6. Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.
   Vide Exercício 11.3 (2) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

7. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x+y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$. [Exercício 11.3 (3) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

8. $z = 2x + y$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,1,3)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.
   Vide Exercício 11.3 (4) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

9. $2x + y + 3z = 6$ é a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,1,1)$. [Vide Exercício 11.3 (5) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

   b) Determine a equação da reta normal no ponto $(1,1,1)$.

10. Determine o plano que seja paralelo ao plano $z = 2x + 3y$ e tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + xy$.
    Vide Exercício 11.3 (8) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

11. Determine os planos que sejam tangentes ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2$ e que contenham o interseção dos planos $x + y + z = 3$ e $z = 0$.
    Vide Exercício 11.3 (9) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

12. β é um plano tangente aos gráficos de $f(x,y) = 2+x^2+y^2$ e $g(x,y) = -x^2-y^2$. Mostre que $a^2 + b^2 = 1$, sendo $(a,b,f(a,b))$ o ponto em que β tangencia o gráfico de f. [Vide Exercício 11.3 (10) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

13. Determine os planos tangentes ao gráfico de $f(x,y) = 2 + x^2 + y^2$ e que contenham o eixo x. [Exercício 11.3 (12) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

14. A função $z = z(x,y)$ é diferenciável e dada implicitamente pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Mostre que
$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$
    é a equação do plano tangente no ponto (x_0, y_0, z_0), $z_0 \neq 0$.
    Vide Exercício 11.3 (14) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

15. [Exercício 11.4 (1) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.] Calcule a diferencial.

a) $z = x^3y^2$ b) $z = x\arctan(x+2y)$

c) $z = \operatorname{sen} xy$ d) $u = e^{s^2-t^2}$

16. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$. Calcule. [Vide Exerc. 11.4 (2) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

a) Um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 1$ para $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

b) Um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

17. Seja $z = \sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$. Calcule. [Exercício 11.4 (3) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

a) A diferencial de z no ponto $(1,8)$.

b) Um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 7,9$.

c) Um valor aproximado para a variação Δz em z, quando se passa de $x = 1$ e $y = 8$ para $x = 0,9$ e $y = 8,01$.

18. Defina a diferencial de uma função de três variáveis.
Vide Exercício 11.4 (10) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

19. Calcule a diferencial. [Exercício 11.4 (11) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

a) $w = xyz$ b) $x = e^{2u+2v-t^2}$ c) $w = \frac{x^2+y^2}{1+z^2}$ d) $s = (1+x^2)^{yz}$

20. Calcule aproximadamente $\sqrt{(0,01)^2 + (3,02)^2 + (3,97)^2}$.
Vide Exercício 11.4 (12) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

21. Calcule $\nabla f(x,y)$. [Exercício 11.5 (1) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

a) $f(x,y) = x^2y$ b) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ d) $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$

22. Defina gradiente de uma função de três variáveis. Calcule $\nabla f(x,y,z)$.
Vide Exercício 11.5 (2) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

c) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{z^2}$ d) $f(x,y,z) = z\arctan\frac{x}{y}$

23. Seja $f(x,y) = x^2 - y^2$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0,y_0)$, para os pontos dados abaixo. [Exercício 11.5 (3) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

a) $(1,1)$ *b*) $(-1,1)$ *c*) $(-1,-1)$ *d*) $(1,-1)$.

24. Seja $f(x,y) = \arctan(\frac{x}{y})$. Represente geometricamente $\nabla f(x_0, y_0)$, sendo (x_0, y_0) um ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$.
Vide Exercício 11.5 (4) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

25. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma curva diferenciável com imagem contida na curva de nível $f(x,y) = 1$, isto é, para todo t no domínio de γ, temos $f(x(t), y(t)) = 1$ (dê exemplo de uma tal curva). Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Prove que $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0$. Interprete geometricamente.
Vide Exercício 11.5 (5) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

26. Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferenciável com imagem contida na superfície de nível $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Seja $\gamma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Prove que $\gamma'(t_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Interprete geometricamente. Vide Exercício 11.5 (6) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

27. Seja $f(x,y) = xy$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva diferenciável com imagem contida na curva de nível $f(x,y) = 2$. Mostre que para todo $t \in I$, temos $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$. Dê exemplo de uma curva com imagem na curva de nível $xy = 2$. [Exercício 11.5 (8) - Guidorizzi, 5ª ed., V. 2.]

28. Sejam $f(x,y) = y - x^2$ e $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}^2 t)$.
Vide Exercício 11.5 (9) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol. 2.

    a) Verifique que a imagem de γ está contida na curva de nível $y - x^2 = 0$.

    b) Desenhe a imagem de γ.

    c) Verifique que para todo t temos $\gamma'(t) \cdot \nabla f(\gamma(t)) = 0$.

29. Seja $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva diferenciável com imagem na superfície de nível $S : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$, e $\gamma(t_0) = P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.[Vide Exercício 11.5 (11) - Guidorizzi, 5ª ed., V. 2.]

    a) Mostre que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$.

    b) Dê a equação do plano tangente à superfície de nível S, no ponto P_0.

    c) Analogamente, para a superfície $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$ e $P_1 = (1, 1, 1)$.