MAT 2464 - Cálculo II - IMEUSP

Lista 4 - Derivadas Parciais.

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Segundo semestre de 2025

1. Determine as deirivadas parciais [Exerc. 10.1 (1)- Guidorizzi, 5ª ed., V. 2.]

   a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$
   b) $z = \cos xy$
   c) $z = \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$
   d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$
   e) $z = x^2\ln(1+x^2+y^2)$
   f) $z = xye^{xy}$
   g) $f(x,y) = (4xy - 3y^3)^3 + 5x^2y$
   h) $z = \arctan\frac{x}{y}$
   i) $g(x,y) = x^y$
   j) $z = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$
   l) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^2+3}$
   m) $z = \frac{x\,\mathrm{sen}\,y}{\cos(x^2+y^2)}$

2. Considere a função $z = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Verifique que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

   [Exercício 10.1 (2) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

3. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável e tal que $\phi'(1) = 4$. Seja $g(x,y) = \phi\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule [Vide Exercício 10.1 (3) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)$
   b) $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1)$

4. Suponha que a função $z = z(x,y)$ admita derivadas parciais em todos os pontos de seu domínio e que seja dada implicitamente através da equação $xyz + z^3 = x$. Expresse $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em termos de x, y, z.

   [Exercício 10.1 (10) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

5. Seja $f(x,y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{-t^2}dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

   [Exercício 10.1 (15) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

6. Seja $f(x,y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2}dt$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

   [Exercício 10.1 (16) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

7. [Exercício 10.1 (21) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   Seja $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$

   (a) Esboce o gráfico de f.

   (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

8. [Exercício 10.1 (23) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   Seja $f(x,y) = x^2+y^2$ e seja $\gamma(t) = (t,t,z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva com imagem contida no gráfico de f.

   (a) Determine $z = z(t)$.

   (b) Esboce os gráficos de f e γ.

   (c) Detrmine a reta tangente a γ no ponto $(1,1,2)$.

   (d) Seja T reta no item c. Mostre que T está contida no plano de equação

$$z - f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1).$$

9. [Exercício 10.1 (24) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

   Seja $f(x,y) = x^2+y^2$ e seja $\gamma(t) = (x(t),y(t),z(t))$ uma curva diferenciável com imagem contida no gráfico de f. Suponha, ainda, $\gamma(0) = (1,1,2)$. Seja T a reta tangente a γ em $\gamma(0)$. Mostre que T está contida no plano

$$z - f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1).$$

10. [Exercício 10.1 (26) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]

    Seja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ e seja $\gamma(t) = (t,t,z(t))$, $t \in \mathbb{R}$, uma curva cuja imagem está no gráfico de f. Seja T a reta tangente a γ no ponto $\gamma(0)$. Mostre que T não está contida no plano de equação

$$z - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0).$$

11. Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$, mas que f não seja contínua em nenhum ponto de $\mathbb{R}^2$.
Vide Exercício 10.1 (28) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

12. [Exercício 10.1 (29) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]
Dizemos que (x_0, y_0) é **ponto crítico** ou **estacionário** de $z = f(x, y)$ se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Determine, caso existam, os pontos críticos da função dada.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$
b) $f(x, y) = 2x + y^3$
c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + x - y$
d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$
e) $f(x, y) = 3x^2 + 8xy^2 - 14x - 16y$
f) $f(x, y) = x^4 + 4xy + y^4$

13. [Exercício 10.1 (30) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]
Seja (x_0, y_0) um ponto de $\mathrm{Dom}(f)$, o domínio de f. Dizemos que (x_0, y_0) é um **ponto de máximo local** de f (respectivamente, **ponto de mínimo local**) se existe uma bola aberta B de centro (x_0, y_0) tal que temos

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ para todo } (x, y) \in B \cap \mathrm{Dom}(f)$$

(respectivamente, $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$). Prove que se (x_0, y_0) é um **ponto interior** de $\mathrm{Dom}(f)$ e se f admite derivadas parciais em (x_0, y_0), então uma **condição necessária** para que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo local ou de mínimo local é que (x_0, y_0) seja um **ponto crítico** de f. Isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

14. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prove que f é uma constante.
Vide Exercício 10.1 (31) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

15. Dê exemplo de uma função $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in A$, mas que f não seja constante em A.
Vide Exercício 10.1 (32) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

16. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe para todo $(x,y) \in A$. Sejam (x_0,y_0) e (x_0+h,y_0) dois pontos de A. Prove que se o segmento de extremidades (x_0,y_0) e (x_0+h,y_0) estiver contido em A, então existirá $\overline{x}$ entre x_0 e x_0+h tal que

$$f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x},y_0)h.$$

Vide Exercício 10.1 (34) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.

17. Seja $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A aberto, e suponha que f admite derivadas parciais em A. Seja $(x_0,y_0) \in A$. Prove que se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em (x_0,y_0), então f também será. Vide Exercício 10.1 (35) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.
Sugestão. Escreva
$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f(x,y) - f(x_0,y)] + [f(x_0,y) - f(x_0,y_0)]$
e aplique o TVM a cada parcela entre colchetes.

18. Calcule as derivadas parciais. [Exerc. 10.2 (1) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]
a) $f(x,y,z) = xe^{x-y-z}$ b) $w = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{z}\right)$
c) $w = \frac{xyz}{x+y+z}$ d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)$
e) $s = f(x,y,z,w) = xw\ln(x^2+y^2+z^2+w^2)$

19. [Exercício 10.2 (4) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $f(3) = 4$. Seja

$$g(x,y,z) = \int_0^{x+y^2+z^4} f(t)dt.$$

Calcule

a) $f(x,y,z) = xe^{x-y-z}$ b) $w = \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{z}\right)$ c) $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)$

20. [Exercício 10.2 (6) - Guidorizzi, 5ª ed., Vol 2.]
Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $\varphi'(3) = 4$. Seja $g(x,y,z) = \phi(x^2+y^2+z^2)$. Calcule

a) $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,1)$ b) $\frac{\partial g}{\partial y}(1,1,1)$ c) $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,1)$