MAT 2464- Cálculo II - IMEUSP
Lista 3 de Exercícios - Segundo semestre de 2025
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1. [Exercício 8.2 – 1, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   Desenhe as curvas de nível e esboce o gráfico.

   a) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

   b) $f(x,y) = x + 3y$

   c) $z = 4x^2 + y^2$

   d) $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2$

   e) $z = x + y + 1$

   f) $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   g) $f(x,y) = x^2$, com $-1 \leq x \leq 0$ e $y \geq 0$

   h) $f(x,y) = 1 - x^2$, com $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$

   i) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   j) $z = (x - y)^2$, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$

   l) $z = f(x,y)$ dada por $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$

   m) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$, com $x^2 + y^2 < 1$

   n) $z = \arctan(x^2 + y^2)$

   o) $f(x,y) = x$, $x \geq 0$

   p) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 1$

   q) $f(x,y) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$

   r) $f(x,y) = xy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

2. [Exercício 8.2 – 2, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   Desenhe as curvas de nível e determine a imagem.

   a) $f(x,y) = x - 2y$

   b) $z = \dfrac{y}{x - 2}$

   c) $f(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

   d) $z = \dfrac{x}{y - 1}$

   e) $z = xy$

   f) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   g) $z = 4x^2 + y^2$

   h) $z = 3x^2 - 4xy + y^2$

   i) $z = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

   j) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

3. [Exercício 8.2 – 4, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em A. Determine, também, os pontos em que estes valores são atingidos.

   a) $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 3$ e $A = \mathbb{R}^2$ b) $f(x,y) = xy$ e $A = \mathbb{R}^2$

   c) $f(x,y) = xy$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$

   d) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$

   e) $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 1\}$
   Sugestão: $g(y) = f(1-2y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, fornece os valores de f sobre a reta $x + 2y = 1$.

   f) $f(x,y) = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$ e $A = \mathbb{R}^2$

   g) $f(x,y) = xy$ e $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$

4. [Exercício 8.3 – 1, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   Represente geometricamente o domínio da função dada.

   a) $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ b) $f(x,y,z) = \sqrt{1-z}$

   c) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x-y-z}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$

   d) $w = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$ e) $f(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2$

==========

5. [Exercício 9.1 – 1, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   Calcule, caso exista.

   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sin}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

   e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$ f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$

   g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{y-x^3}$ h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-y^2}$

6. [Exercício 9.1 – 2, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   Seja $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ (veja Exemplo 9 – Seção 8.2).

   (a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, com $a^2 + b^2 > 0$. Mostre que, quaisquer que sejam a e b,

   $$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

   Tente visualizar este resultado através das curvas de nível de f.

   (b) Calcule $\lim_{t\to 0} f(\delta(t))$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$.

   (Antes de calcular o limite, tente prever o resultado pelas curvas de nível de f.)

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}$ existe? Por quê?

7. [Exercício 9.2 – 1, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   Determine o conjunto dos pontos de continuidade. Justifique a resposta.

   a) $f(x,y) = 3x^2y^2 - 5xy + 6$

   b) $f(x,y) = \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2}$

   c) $f(x,y) = \ln \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

   d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

   e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x-3y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   g) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{r^2-1}\right)}, & \text{se } r < 1 \text{ onde } r = \|(x,y)\| \\ 0, & \text{se } r \geq 1. \end{cases}$

8. [Exercício 9.2 – 2, Guidorizzi, Cálculo Vol. 2, 5ª ed.]

   A função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.