

NOTAS DE AULA

MAC0105 - Fundamentos de Matemática para a Computação

Escrito por Walner Mendonça e Guilherme Mota

USP

Março de 2026

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Neste documento você encontrará as notas de aula da disciplina MAC0105 - Fundamentos de Matemática para a Computação. O objetivo principal deste material é fornecer a base matemática e formal, além do raciocínio rigoroso, necessários para o estudo da Ciência da Computação. Mais do que isso, esperamos que você leitor(a) consiga apreciar a beleza e a importância da matemática.

Ao longo da leitura destas notas, você será apresentado(a) a conceitos essenciais. Iniciaremos com a compreensão do que constitui uma *prova matemática*, seguida pelos estudos de *conjuntos*, em que introduziremos alguns elementos básicos para trabalharmos. Feito isso, discutimos um pouco de *lógica proposicional* e nos aprofundaremos em diversos *métodos de provas*, estratégias que utilizaremos para conseguir demonstrar os resultados. Além disso, nos aprofundaremos no estudo mais detalhado de *predicados e quantificadores*.

Avançando no conteúdo, exploraremos as estruturas e relações entre elementos por meio do estudo de *relações e funções*. Veremos também técnicas de contagem fundamentais, como o *Princípio da Casa dos Pombos*, e uma poderosa ferramenta de demonstração, a *indução matemática*, o que encerra a primeira metade do curso.

Na segunda metade do curso, detalharemos propriedades estruturais essenciais através do estudo de *relações de equivalência*, *classes de equivalência e partições*, além de introduzir conceitos de *aritmética modular*. Em seguida, apresentamos *ordens e fechos*, e também *sequências e subsequências*. Por fim, consolidaremos as noções sobre tamanhos de conjuntos e o conceito de infinito discutindo a separação entre *conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis*.

Esperamos que este material sirva como um guia sólido para a sua jornada no aprendizado da matemática e suas aplicações.

Capítulo 2

Primeiras provas matemáticas

Um ponto fundamental na Matemática é a linguagem. É através da linguagem que nos comunicamos, que expressamos ideias, e construímos conhecimento. Neste primeiro capítulo, nosso objetivo é nos familiarizarmos com a linguagem que vamos utilizar para expressar ideias matemáticas e, mais importante, aprendermos a pensar como matemáticos. O foco central desta jornada será adquirir um conhecimento sólido, desenvolver o raciocínio matemático e o aprendizado das demonstrações matemáticas, enquanto exploramos diversos exemplos envolvendo conceitos matemáticos fundamentais. Demonstrar um teorema não é apenas aplicar regras, mas sim contar uma história lógica e irrefutável que convence o leitor da verdade de uma afirmação. Sempre que possível, queremos obter uma prova que seja o mais clara e elegante possível. Para ilustrar essa arte, começaremos com alguns exemplos simples e clássicos.

2.1 Somando inteiros positivos

Um primeiro exemplo que discutimos aqui é um clássico conhecido da maioria de nós. Dado um número inteiro positivo n , como podemos determinar o valor da soma dos primeiros n números inteiros positivos? Em outras palavras, qual o valor de $1 + 2 + \dots + n$?

Alguém pode se sentir tentado a responder imediatamente que o resultado é fácil, é dado pela soma dos elementos de uma progressão aritmética de razão 1. Mas isso requer saber o significado de progressão aritmética e também alguma fórmula que dê o valor dessa progressão. Proponho aqui que demos um passo atrás e evitemos alguns conceitos que não discutimos ainda e mais ainda, que evitemos fórmulas prontas.

2.1.1 Uma primeira prova

Um primeiro passo para começar a desenvolver as ideias para resolver a questão é talvez tentar visualizar de uma forma mais clara essa soma. Escrever exemplos para valores pequenos de n pode nos ajudar a entender melhor o problema, desenhar algumas figuras também pode ajudar a entender melhor o que está por trás da questão. Começemos desenhando os números que estamos somando como bolinhas, linha por linha, para um dado n qualquer. Trabalhar com valores pequenos de n pode ser útil para trabalhar nossa intuição sobre o problema, mas pensar de forma geral nos ajuda a pensar de forma abstrata e entender melhor o problema. Considere a visualização descrita na Figura ??.

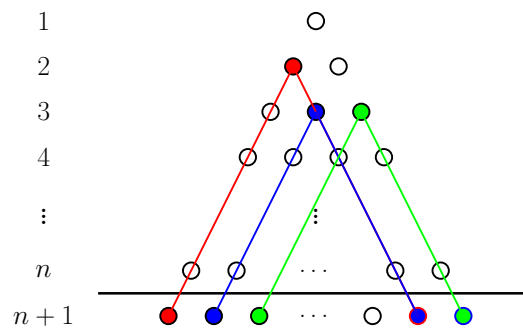


Figura 2.1: Uma visualização de $1 + 2 + \dots + n$ objetos, seguido de uma linha com $n + 1$ objetos.

Perceba que para cada uma das bolinhas nas primeiras n linhas, se traçamos as duas diagonais principais, uma à esquerda e outra à direita, até a linha $n + 1$, estamos associando cada uma das bolinhas nas n primeiras linhas a um único **par de bolinhas** na linha $n + 1$. Assim, conseguimos perceber que a quantidade de bolinhas nas n primeiras linhas, que é exatamente $1 + 2 + \dots + n$, é exatamente igual à quantidade de pares de bolinhas que temos na linha $n + 1$, que contém $n + 1$ bolinhas. Mas quanto é essa quantidade de pares?

Para simplificar, vamos denotar por $\binom{n}{2}$ a quantidade de pares que podemos formar a partir de um conjunto de n elementos. Assim, a quantidade que queremos é exatamente $\binom{n+1}{2}$. Mas de quantos modos podemos formar pares de um conjunto de $n + 1$ elementos? Bem, vamos primeiramente escolher um elemento a de um total de $n + 1$ elementos, e o segundo elemento b pode ser escolhido de um total de n elementos, uma vez que a já foi escolhido. Isso dá um total de $n(n + 1)$ pares. Porém, poderíamos ter escolhido primeiro b e depois a nessa contagem que fizemos, de modo que contamos cada possível par, como o par $\{a, b\}$, duas vezes. Assim, o total de pares possíveis é na verdade $\frac{(n+1)n}{2}$, de modo que acabamos de finalizar nossa primeira demonstração, que $\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$, e temos nosso primeiro teorema.

Teorema 1. Para todo inteiro $n \geq 1$, temos que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

Dado um conjunto de n elementos, dizemos que n escolhe 2 para nos referir ao valor de $\binom{n}{2}$.

A prova acima é uma prova elegante, que envolve uma observação esperta, mas não é a mais simples. Para cada resultado matemático podem existir diversas provas diferentes, e cada uma delas lança luz sobre uma técnica diferente, ou sobre alguma ideia ou estratégia que talvez possa ser aplicada em outros problemas.

2.1.2 Uma prova algébrica

A história (talvez apócrifa) conta que Carl Friedrich Gauss, ainda quando era uma criança, deduziu a soma dos primeiros n inteiros positivos ao ter sido solicitado a somar os números de 1 a 100.

A ideia de Gauss surge naturalmente quando visualizamos a soma em que estamos interessados de duas formas diferentes. Seja $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$. Podemos escrever S_n das seguintes formas:

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \textcolor{red}{2} + \textcolor{green}{3} + \cdots + \textcolor{blue}{(n-1)} + \textcolor{brown}{n}, \\ S_n &= n + \textcolor{red}{(n-1)} + \textcolor{green}{(n-2)} + \cdots + \textcolor{blue}{2} + \textcolor{brown}{1}. \end{aligned}$$

Somando as duas igualdades acima, “coluna por coluna”, notamos que cada par soma exatamente $(n+1)$. Assim, como a soma S_n tem n termos, obtemos

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1),$$

o que conclui a nossa prova, uma vez que implica em

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

Uma prova combinatória

Na Combinatória, é comum provar igualdades algébricas mostrando que ambos os lados da igualdade representam a quantidade de elementos em um mesmo conjunto, mas vistos de formas diferentes.

Seja $C = \{1, 2, \dots, n+1\}$ um conjunto com $n+1$ elementos. O conjunto que vamos contar seus elementos de duas maneiras diferentes é o conjunto S de todos os pares de elementos de C . Vamos contar a quantidade de elementos de S de duas

formas diferentes. Por definição, sabemos que

$$|S| = \binom{n+1}{2}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, em todo elemento $\{i, j\}$ de S (cada elemento de S é um par de elementos de C , não se esqueça), existe um elemento que é maior que o outro. Assim, podemos contar os elementos de S da seguinte forma: primeiro escolhemos o maior elemento do par, digamos i , que pode ser qualquer um dos $n+1$ elementos de C , o que nos dá $n+1$ escolhas para o maior elemento do par. Uma vez escolhido i , precisamos ver de quantas formas podemos escolher o menor elemento do par, digamos j . Mas a quantidade de escolhas para j depende de qual foi o valor de i que escolhemos. Mas para qualquer i com $1 \leq i \leq n+1$ que foi escolhido, temos exatamente $i-1$ escolhas para j . Portanto, o total de pares é dado por

$$|S| = \sum_{i=1}^{n+1} (i-1) = 0 + 1 + 2 + \cdots + n.$$

Mas note que juntamente com (??), a igualdade acima nos dá

$$1 + 2 + \cdots + n = \binom{n+1}{2},$$

o que conclui nossa prova.

2.1.3 Uma prova diferente

Vamos partir agora para uma última prova, que inclui conceitos mais avançados, mas que já podemos abordar agora de uma forma natural. Lembre que $S_n = 1+2+\cdots+n$. Em todas as provas anteriores, assumimos que n era um inteiro positivo e nada mais. Feito isso, conseguimos concluir que para qualquer n que seja inteiro positivo, temos que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Caso tivéssemos tempo infinito a nossa disposição, poderíamos verificar que o resultado vale para $n = 1$, i.e., que $1 = \frac{(1+1)1}{2}$, e assim por diante, verificamos que para $n = 2$, $1 + 2 = 3 = \frac{(2+1)2}{2}$, e assim sucessivamente. Mas como esse não é o caso, essa estratégia não tem chances de funcionar. Mas pensemos na seguinte estratégia: já verificamos que o resultado é válido para $n = 1$, de modo que podemos assumir que $n \geq 2$. Agora, **suponha** que o resultado seja válido para $n-1$. Ou seja, assumimos que

$$S_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.2)$$

Vamos agora prosseguir para mostrar que $S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. Mas ao observar S_n com atenção, notamos que

$$\begin{aligned} S_n &= (1 + 2 + \cdots + (n-1)) + n \\ &= S_{n-1} + n. \end{aligned}$$

Mas por (??), podemos substituir S_{n-1} na última igualdade por $\frac{n(n-1)}{2}$, obtendo

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

2.2 Trabalhando a intuição

Vamos analisar brevemente alguns problemas que tem a capacidade de nos fazer pensar com calma e trabalhar nossa intuição matemática, seja nos forçando a observar com calma as sutilezas do problema, seja nos mostrando que a intuição pode nos enganar, ou mesmo nos obrigando a traçar alguma estratégia para conseguir avançar no problema.

2.2.1 Um desafio linguístico

Imagine que você está conversando com os amigos em uma noite tranquila, em Recife, e de repente um amigo solta a seguinte frase: "Percebi que a palavra 'Pernambuco' não tem letras repetidas. Qual será o tamanho da maior palavra que conseguimos formar em português que não tem letras repetidas?".

Como podemos ter uma ideia inicial para trabalhar nessa questão? Bem, uma estratégia inicial é tentar encontrar palavras que não tem letras repetidas. Mas nosso cérebro teria muito trabalho em buscar uma dessas palavras dentre todas que conhecemos. Precisamos de uma estratégia que restrinja o conjunto de palavras que queremos buscar.

Uma ideia é tentar utilizar todas as vogais, para nos permitir ter muitas sílabas. Nosso ponto de partida é conseguir uma palavra com mais de 10 letras, que é o total de letras de 'Pernambuco'. Note que 'Pernambuco' nem contém todas as vogais, de modo que devemos conseguir palavras maiores.

Após pensar um pouco, possivelmente chegamos a palavras como 'computáveis' ou 'republicano', que possuem 11 letras. Mas notando que 'computáveis' está no plural, obviamente podemos fazer o mesmo com 'republicano', obtendo 'republicanos', que possui 12 letras. Temos então uma palavra com 12 letras sem repetições. Mas ok, será que conseguimos encontrar uma palavra maior? Podemos adicionar ao rol de regras que estamos aplicando às palavras que estamos buscando o seguinte:

queremos palavras que, além de ter todas as vogais, estejam no plural (terminando com ‘s’) e, para garantir a possibilidade de plural, não podem ter ‘s’ no meio da palavra.

Esse é um problema que não iremos provar que não existe palavra com mais letras do que a maior que encontrarmos, pois certamente podemos formar palavras respeitando as regras do português, mas que ainda nem mesmo existem. Por exemplo, ‘blandrifusteco’ é uma palavra que respeita as regras do português, mas que não existe (e tem 14 letras). Mas voltando ao mundo real, das palavras que existem, será que conseguimos uma palavra com 13 letras utilizando o refinamento de regras que propomos? A resposta é sim! A palavra ‘penduricalhos’ tem 13 letras, todas distintas (contém também todas as vogais e é um plural, mas não precisamos disso). Com algum esforço maior, notamos que o diminutivo do particípio plural de expurgar é ‘expurgadinhos’, que tem 13 letras, todas distintas. Você consegue alguma obter uma outra palavra com 13 letras sem repetições?

2.2.2 Um problema sobre chapéus

Considere a situação em que quatro prisioneiros, A , B , C e D , estão em um corredor. Três deles (A , B e C) estão em fila, A atrás de B , que está atrás de C , que está de frente para uma parede. O quarto prisioneiro, D , está do outro lado dessa parede e não pode ver nem ser visto pelos outros. Dessa forma, A consegue ver os chapéus de B e C ; B consegue ver apenas o chapéu de C , que não vê o chapéu de ninguém; D , que está do outro lado da parede não vê o chapéu de ninguém. Sabe-se que há dois chapéus azuis e dois vermelhos, e os prisioneiros conhecem essa distribuição. Eles não podem falar nada a não ser a cor do seu próprio chapéu, caso saibam. Não podem se comunicar de maneira nenhuma e precisam sempre olhar para frente. Eles têm alguns minutos para que um deles fale a cor do próprio chapéu, situação em que todos são libertados! Porém, caso o tempo se esgote ou algum prisioneiro fale a cor errada do seu próprio chapéu, todos os prisioneiros serão executados. Antes de destrinchar a solução correta, vamos avaliar alguns instintos e pensamentos iniciais comuns, mas equivocados, sobre esse problema.

1. “É impossível, pois ninguém tem informações suficientes de início.”

Muitas pessoas desistem do problema rapidamente, argumentando que nem C nem D veem nada, B vê apenas um chapéu (o que deixa ele com duas possibilidades para o seu próprio chapéu), e A vê dois chapéus (mas se forem um de cada cor, não terá certeza do seu próprio chapéu). O erro aqui é assumir que o jogo acaba no primeiro instante, quando cada prisioneiro analisa a informação que recebe de sua visão, ignorando a atitude dos outros prisioneiros. Como

a regra do jogo permite que alguns minutos se passem, o silêncio de algum prisioneiro após um pequeno tempo pode dar alguma informação importante.

2. “**O prisioneiro A é a única esperança de salvação.**” Como *A* é o único que enxerga o maior número de chapéus (dois), é natural pensar que toda a responsabilidade cai sobre ele. O problema desse argumento é não perceber que *B* possui uma vantagem tática: ele pode não ganhar muita informação com o que está vendo, mas pode escutar o que o prisioneiro *A* faz... ou, na verdade, o que *A* *não faz*.

Para resolver esse enigma, precisamos analisar a situação passo a passo, do ponto de vista de alguns prisioneiros. Começemos com *A*, que pode ver os chapéus de *B* e *C*. Como há exatamente dois chapéus de cada cor (vermelhos e azuis), se *A* visse que *B* e *C* têm chapéus da **mesma cor**, ele saberia imediatamente que o seu é vermelho (já que os dois azuis se esgotaram). Nessa situação, *A* prontamente falaria a cor do seu chapéu e salvaria a todos.

No entanto, suponha que um minuto se passe e *A* **permaneça em silêncio**. O que esse silêncio significa? Transmite a todos (em especial a *B*) uma informação vital: *A* não viu dois chapéus da mesma cor e não consegue ter certeza da cor de seu próprio chapéu. Logo, *A* está necessariamente vendo um chapéu azul e um vermelho nas cabeças de *B* e *C*. Isso significa que *B* e *C* obrigatoriamente têm chapéus de **cores diferentes**. O prisioneiro *B*, que é uma pessoa esperta e conhece as regras, rapidamente deduz isso. Com essa nova informação em mente, a tarefa de *B* se torna trivial: ele só precisa olhar para a cabeça de *C*. Se *C* estiver usando um chapéu vermelho, *B* sabe que o seu só pode ser azul. Se *C* estiver usando um chapéu azul, *B* sabe que o seu só pode ser vermelho. Assim, *B* consegue salvar a todos.

Portanto, a partir da dedução de que *A* não pôde responder, o prisioneiro *B* consegue descobrir com 100% de certeza a exata cor do seu próprio chapéu, o que garante a liberdade de todos.

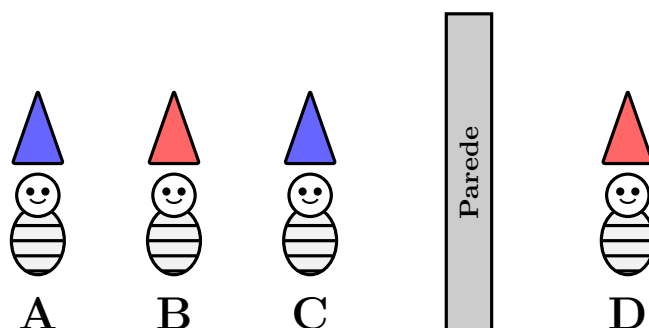


Figura 2.2: Ilustração do problema dos chapéus. *A* vê *B* e *C*, mas não *D*. *B* vê *C*. O prisioneiro *C* vê apenas a parede e *D* está isolado.

2.2.3 O problema de Monty Hall

Discutiremos agora um problema clássico da década de 1970: um participante de um *programa de auditório* escolhe uma entre três portas, digamos, A , B e C . Atrás de uma delas há um prêmio, e atrás das outras, há bodes. A probabilidade do prêmio estar na porta A , B ou C é de $1/3$. Após o participante fazer sua escolha inicial (digamos, a porta A), o apresentador, que sabe o que há atrás das portas, abre uma das outras duas portas, aquela que contém um bode (digamos, a porta B). Ele então pergunta: "*Você quer trocar para a porta C ou mantém sua escolha na A ?*".

Antes de apresentarmos a solução correta, mais uma vez é instrutivo discutirmos alguns pensamentos comuns, porém incorretos, que a maioria das pessoas tem ao se deparar com esse problema pela primeira vez:

1. **“Quando restam apenas duas portas, a chance é de 50% para cada uma.”** Esse é certamente um dos erros mais comuns. A intuição nos diz que, como há apenas duas opções restantes (a porta escolhida e a porta que continua fechada) e um prêmio, as chances devem ser iguais. O erro aqui está em assumir que a ação do apresentador alterou a probabilidade da porta escolhida inicialmente, ou que ambas as portas restantes são simétricas na forma como a informação foi revelada.
2. **“O apresentador não adiciona nenhuma informação nova sobre a minha escolha ao abrir a porta com o bode.”** Outro pensamento comum é achar que o fato do apresentador revelar um bode simplesmente não muda nada sobre a nossa aposta inicial. A falha nesse raciocínio é ignorar que o apresentador *não faz uma escolha aleatória*. Ele é obrigado a abrir uma porta que contenha um bode e que não seja a porta que o participante escolheu. Essa ação deliberada fornece uma informação crucial para o jogo.

Talvez contraintuitivamente para algumas pessoas, a resposta correta é **sim, é melhor trocar!** Também contraintuitivamente, como discutido acima, a chance de vitória não é de 50% para cada porta. Na verdade, com a estratégia de sempre trocar de porta, a probabilidade de vitória são incríveis $2/3$. Vamos entender isso em detalhes. Ao escolher uma porta no início (digamos, a porta A), a probabilidade de nela estar o prêmio é de $1/3$. Consequentemente, a probabilidade de o prêmio estar em *alguma das outras duas portas* (portas B ou C) é de $2/3$. Até aí, tudo bem. Se o jogo se encerrasse aí, a chance de vitória seria de $1/3$ e a de derrota seria $2/3$.

Mas o jogo não se encerra aqui. O apresentador abre a porta B para revelar um bode e agora tomamos a decisão de trocar de porta. Se o prêmio estivesse na porta A , que escolhemos inicialmente, ao mudar de porta certamente perderíamos o jogo. Por outro lado, se o prêmio não está na porta A , e o apresentador abriu a porta B ,

que contém um bode, ao mudar de porta certamente escolheremos a porta C , que contém o prêmio. Portanto, se inicialmente escolhemos a porta com prêmio, nós perdemos. Por outro lado, se inicialmente escolhemos a porta errada nós ganhamos. Portanto, as probabilidades de vitória e derrota se invertem e temos $2/3$ de chance de vitória caso optemos por mudar de porta.

2.2.4 Um problema sobre amigos e estranhos

Deixamos para o final desta seção um problema que traduz bem a ideia de uma belíssima área conhecida como Teoria de Ramsey, cujo ponto fundamental é a ideia de que ‘não existe caos completo’, no sentido que se uma determinada estrutura for grande o suficiente, certamente existem subestruturas que respeitam uma determinada propriedade. Considere a questão a seguir: Qual a menor quantidade de pessoas necessárias em uma sala para garantirmos que existam **3 pessoas que se conhecem todas entre si** ou **3 pessoas que não conhecem nenhuma entre si**?

Antes de resolver o problema, vamos convertê-lo em algum problema que nos permita estruturar as ideias mais facilmente. Podemos simplesmente representar as pessoas como ‘bolinhas’ e as relações de conhecimento (se conhecem ou não) como segmentos ligando duas bolinhas. Caso duas pessoas se conheçam, vamos conectar as duas bolinhas correspondentes com um segmento azul; caso contrário, conectaremos com um segmento vermelho. Portanto, o problema original se transforma no seguinte problema: determinar o menor número n tal que para quaisquer maneiras que pintarmos os segmentos entre todos os pares de um conjunto com n bolinhas com vermelho e azul, sempre existe um triângulo todo azul ou todo vermelho.

Ao tentar resolver esse problema, rapidamente notamos que 3 ou 4 não é a resposta certa. De fato, observando com cuidado, percebemos que nem mesmo 5 é a resposta certa, pois existe uma forma de colorir os segmentos entre as 5 bolinhas de forma que não exista um triângulo todo azul ou todo vermelho. Veja o exemplo da Figura ??.

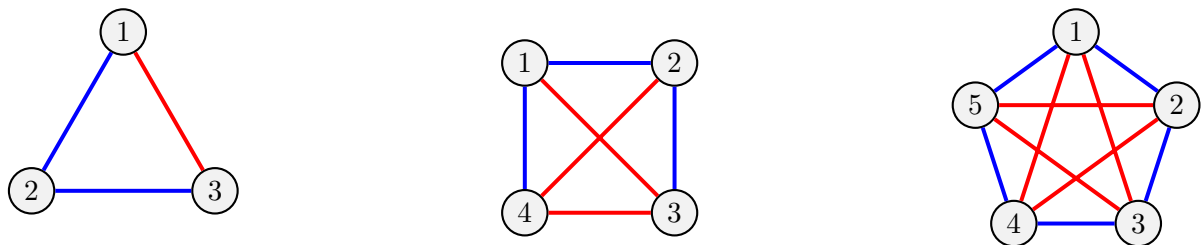


Figura 2.3: Colorações sem triângulos monocromáticos.

A resposta para nossa pergunta é **6 pessoas**. Para demonstrar esse fato, note

que já excluímos o caso em que temos menos que 6 pessoas, de modo que basta mostrar que 6 pessoas é suficiente. Assim, selecione um grupo qualquer de 6 pessoas e escolha uma das pessoas, digamos, Joana. Ainda existem outras 5 pessoas, que vamos separar em dois grupos, aquelas que conhecem Joana e as que não conhecem. Mas perceba que, como existem 5 pessoas dois grupos, certamente (reflita) um desses dois grupos tem pelo menos 3 pessoas. Ou seja, Joana conhece pelo menos 3 pessoas, ou desconhece pelo menos 3 pessoas.

Suponha, sem perda de generalidade, que Joana conheça 3 pessoas: Helena, Carlos e Pedro. Agora, vamos concentrar nossas atenções somente nessas 3 pessoas. Se duas delas se conhecerem (por exemplo, Helena e Carlos), então Joana, Helena e Carlos formam um trio onde todos se conhecem. Caso contrário, se nenhuma delas se conhecer, então elas mesmas formam um trio de completos desconhecidos. Em ambos os casos, o problema é satisfeito.

Uma curiosidade é que se em vez de 3 pessoas que se conhecem ou não, queremos saber a quantidade de pessoas necessárias para garantir que existam 4 pessoas que se conhecem todas entre si ou 4 pessoas que não conhecem nenhuma entre si, a resposta é 18. Se formos um passo além e quisermos garantir 5 pessoas que se conhecem ou não, então precisamos trabalhar bastante, pois no momento em que esse texto foi escrito, o melhor que se sabia é que precisamos de uma quantidade entre 43 e 48 pessoas.