Álgebra Linear I

Notas de curso em linguagem de padrões

Ivan Struchiner
IME-USP

October 19, 2026

Sumário

1 Espaços vetoriais e transformações lineares **2**
Espaços vetoriais: definição e exemplos 2
Transformações lineares, isomorfismos, núcleo e imagem 14

2 Subespaços, geradores e bases **27**
Subespaços: interseção, soma e soma direta 27
Geradores, dependência linear, minimalidade e maximalidade 39
Bases, dimensão, teorema do completamento, teorema do núcleo e da imagem . . . 48

3 Matrizes e sistemas lineares **63**
A matriz de uma transformação linear e mudança de base 63
Sistemas lineares: escalonamento, posto e o conjunto solução 71
Demonstrar e refutar 81

4 Determinantes **86**
Formas n-lineares alternadas 86
Laplace, multiplicatividade e aplicações 96

5 Dualidade e quocientes **104**
Espaço dual, base dual e transposta 104
Duplo dual e anulador 112
Espaços quocientes e teoremas de isomorfismo 119

6 Produto interno **129**
Ortonormalidade, Gram–Schmidt e $S^{\perp}$ 129
Projeção, mínimos quadrados, Riesz e adjunta 138

7 Formas multilineares e sequências exatas **147**
Formas multilineares, Alt^k, produto exterior e contração 147
Complexos e sequências exatas 156

8 Autovalores e diagonalização **161**
Autovalores, autovetores e autoespaços 161
Diagonalização 168
Subespaços invariantes e autovalores complexos 174
Cayley–Hamilton e polinômio mínimo 180

9 Teorema espectral e formas quadráticas **187**
Operadores auto-adjuntos e o teorema espectral 187
Formas quadráticas e a lei de inércia de Sylvester 192
Cônicas e quádricas 198

Capítulo 1

Espaços vetoriais e transformações lineares

Espaços vetoriais: definição e exemplos

Motivação 1.1 (Três situações com a mesma estrutura)

(1) *Flechas no plano.* Somamos pela regra do paralelogramo e multiplicamos por um número esticando a flecha. Em coordenadas, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\, y_1 + y_2)$ e $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

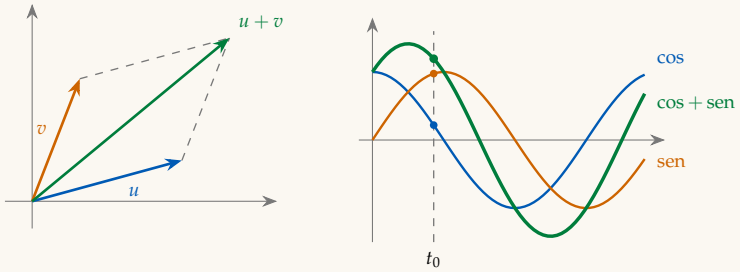
(2) *Funções.* Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos $f + g$ e λf *ponto a ponto*: $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ e $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$. Polinômios somam-se e multiplicam-se por números da mesma forma, e o resultado é um polinômio.

(3) *Soluções de uma equação diferencial.* As funções $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ satisfazem $y'' + y = 0$. Então $a \cos t + b \operatorname{sen} t$ também satisfaz, para quaisquer a, b:

$$(a\cos t + b\operatorname{sen} t)'' + (a\cos t + b\operatorname{sen} t) = a(\cos'' t + \cos t) + b(\operatorname{sen}'' t + \operatorname{sen} t) = 0.$$

Na física isso se chama *princípio de superposição*.

Nas três situações sabemos somar dois objetos e multiplicar um objeto por um número, e o resultado é um objeto do mesmo tipo. E as contas seguem as mesmas regras. A definição de espaço vetorial (Definição 1.2 (Espaço vetorial)) isola essas regras.



flechas — funções, ponto a ponto

A mesma operação em dois mundos. À esquerda, a soma de flechas pelo paralelogramo. À direita, a soma de funções: em cada t_0 (linha tracejada) o valor da soma verde é a soma dos valores azul e laranja. As funções da direita são soluções de $y'' + y = 0$, e a soma também é.

Somar funções é somar infinitas coordenadas ao mesmo tempo, uma para cada t (Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções)).

Veja também: Definição 1.2 (Espaço vetorial), Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções)

`mot-tres-situacoes`

Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Um **espaço vetorial** (real) é um conjunto V munido de duas operações,

$$+ : V \times V \to V,\ (u, v) \mapsto u + v, \qquad \cdot : \mathbb{R} \times V \to V,\ (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

chamadas *soma* e *produto por escalar*, satisfazendo, para todos $u, v, w \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(A1)	$u + (v + w) = (u + v) + w$	(M1)	$\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
(A2)	$u + v = v + u$	(M2)	$1v = v$
(A3)	existe $0 \in V$ com $v + 0 = v$ para todo v	(D1)	$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
(A4)	para cada v existe w com $v + w = 0$	(D2)	$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Os elementos de V são chamados **vetores**; os números reais, **escalares**. O elemento 0 de (A3) é o **vetor nulo**, e um w como em (A4) é um **simétrico** (ou oposto) de v.

Usado em: Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$), Definição 1.29 (Combinação linear), Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais), Definição 2.2 (Subespaço vetorial), Definição 1.36 (Transformação linear), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$), Exemplo 1.15 (Polinômios), Exemplo 1.17 (Espaço nulo), Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada), Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$), Exemplo 1.26 (Operações em $\mathbb{R}^2$ que não dão espaço vetorial), Exemplo 1.28 (Reais positivos com produto e potência), Lema 1.5 (Cancelamento), Nota 1.3 (Três comentários sobre a definição de espaço vetorial), Nota 1.4 (Os três blocos de axiomas), Proposição 1.11 (Não existe espaço vetorial com dois elementos), Proposição 1.6 (Unicidade do vetor nulo e do simétrico)

Veja também: Motivação 1.1 (Três situações com a mesma estrutura)

`def-espaco-vetorial`

Nota 1.3 (Três comentários sobre a definição de espaço vetorial)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Três comentários sobre a Definição 1.2 (Espaço vetorial).

(i) As duas operações são funções com valores em V: "a soma de dois vetores é um vetor" já está na definição, e é a primeira coisa a verificar num exemplo.

(ii) O símbolo 0 aparece com dois sentidos — o número zero e o vetor nulo —, e a Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1) obriga a distingui-los.

(iii) Nenhum axioma fala de comprimento, ângulo ou produto de dois vetores. Isso vem com o produto interno (Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)), como estrutura *adicional*.

Veja também: Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1), Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

`nota-comentarios-a-definicao`

Nota 1.4 (Os três blocos de axiomas)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Os axiomas se agrupam em três blocos. (A1)–(A4) falam só da soma. (M1)–(M2) falam só do produto por escalar. (D1)–(D2) amarram as duas operações. Quando um exemplo falha, em geral falha num dos dois últimos blocos. No item (b) do Exemplo 1.26 (Operações em $\mathbb{R}^2$ que não dão espaço vetorial) só (D2) falha: o bloco que amarra as duas operações é o mais frágil.

Veja também: Exemplo 1.26 (Operações em $\mathbb{R}^2$ que não dão espaço vetorial)

`nota-grupos`

Lema 1.5 (Cancelamento)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Se $u + w = v + w$, então $u = v$.

Demonstração

Seja w' um simétrico de w (A4). Somando w' aos dois lados,

$$u = u + 0 = u + (w + w') \overset{\text{(A1)}}{=} (u + w) + w' = (v + w) + w' \overset{\text{(A1)}}{=} v + (w + w') = v + 0 = v.$$

Usado em: Nota 1.10 (Ordem das demonstrações), Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares) (dem.), Proposição 1.6 (Unicidade do vetor nulo e do simétrico) (dem.), Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1) (dem.)

`lem-cancel`

Proposição 1.6 (Unicidade do vetor nulo e do simétrico)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

A demonstração exige: Lema 1.5 (Cancelamento)

O vetor nulo é único, e cada vetor tem um único simétrico.

A partir de agora o simétrico de v é denotado $-v$, e escrevemos $u - v$ para $u + (-v)$. Esta proposição é o que autoriza essa notação: um símbolo só pode designar um objeto se o objeto for único.

Demonstração

Se 0 e $0'$ satisfazem (A3), então

$$0' \overset{\text{(A3) para } 0}{=} 0' + 0 \overset{\text{(A2)}}{=} 0 + 0' \overset{\text{(A3) para } 0'}{=} 0.$$

Se w e w' são simétricos de v, então $v + w = 0 = v + w'$, isto é, $w + v = w' + v$ por (A2), e o Lema 1.5 (Cancelamento) dá $w = w'$.

Usado em: Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1)

`prop-unicidade-do-nulo-e-do-simetrico`

Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1)

Requer: Proposição 1.6 (Unicidade do vetor nulo e do simétrico)

A demonstração exige: Lema 1.5 (Cancelamento)

Para todos $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

(a) $0\,v = 0$ *(à esquerda o número zero, à direita o vetor nulo);*

(b) $\lambda\,0 = 0$*;*

(c) $(-1)\,v = -v$*.*

Demonstração

(a) Como $0 = 0 + 0$ em $\mathbb{R}$, o axioma (D2) dá

$$0v = (0+0)v = 0v + 0v.$$

Por (A3), também $0v = 0 + 0v$; logo $0 + 0v = 0v + 0v$, e o Lema 1.5 (Cancelamento) dá $0 = 0v$.

(b) Igual, usando (D1) no lugar de (D2): $\lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$, e cancela-se.

(c) Basta ver que $(-1)v$ é *um* simétrico de v, e usar a unicidade:

$$v + (-1)v \overset{\text{(M2)}}{=} 1v + (-1)v \overset{\text{(D2)}}{=} (1 + (-1))v = 0v = 0,$$

a última igualdade pelo item (a).

Usado em: Nota 1.10 (Ordem das demonstrações), Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$) (dem.), Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares) (dem.), Proposição 2.3 (Critério de subespaço) (dem.)

`prop-zeros`

Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

A demonstração exige: Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1)

Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$.

Demonstração

Suponha $\lambda \neq 0$. Então

$$v \overset{\text{(M2)}}{=} 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v \overset{\text{(M1)}}{=} \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}0 = 0,$$

pela Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1)(b).

Usado em: Nota 2.47 (Independência linear em casos pequenos), Nota 1.9 (O axioma (M2) não é supérfluo), Nota 1.10 (Ordem das demonstrações), Proposição 1.11 (Não existe espaço vetorial com dois elementos) (dem.)

`cor-lv`

Nota 1.9 (O axioma (M2) não é supérfluo)

Requer: Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$)

O axioma (M2), $1v = v$, parece supérfluo, e não é. Em qualquer V com uma soma

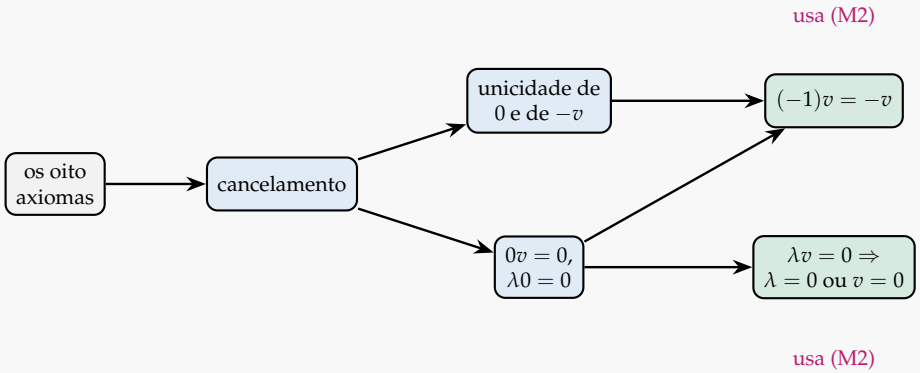
satisfazendo (A1)–(A4), defina o produto por escalar *trivial* $\lambda \cdot v := 0$ para todos λ e v. Então (M1), (D1) e (D2) valem, porque os dois lados são 0; só (M2) falha, desde que $V \neq \{0\}$. Sem (M2), o produto por escalar poderia não ter relação nenhuma com a soma. O Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$) é falso nessa estrutura, e isso mostra onde (M2) é usado.

`nota-m2`

Nota 1.10 (Ordem das demonstrações)

Requer: Lema 1.5 (Cancelamento), Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1), Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$)

A ordem em que as primeiras consequências dos axiomas são demonstradas: o cancelamento (Lema 1.5 (Cancelamento)), a unicidade de 0 e de $-v$ (Proposição 1.6 (Unicidade do vetor nulo e do simétrico)), os produtos por zero e por -1 (Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1)) e o Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$).



Cada caixa só usa as que estão à sua esquerda. O erro mais comum é demonstrar $0v = 0$ usando $(-1)v = -v$, isto é, andar contra uma seta: a tentativa "$0v = (1-1)v = v - v = 0$" usa o item (c) da Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1), cuja demonstração usa o item (a). A pergunta a fazer em cada passo é "o que eu posso usar aqui?". As duas caixas verdes usam (M2), e é por isso que a estrutura da Nota 1.9 (O axioma (M2) não é supérfluo) as derruba.

Veja também: Nota 1.9 (O axioma (M2) não é supérfluo)

`nota-ordem-das-demonstracoes`

Proposição 1.11 (Não existe espaço vetorial com dois elementos)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

A demonstração exige: Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$)

Não existe espaço vetorial real com exatamente dois elementos. Mais do que isso: um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ tem infinitos elementos.

Demonstração

Tome $v \neq 0$ em V. Se $\lambda v = \mu v$, então $(\lambda - \mu)v = \lambda v - \mu v = 0$, e o Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$) dá $\lambda = \mu$. Logo $\lambda \mapsto \lambda v$ é injetora de $\mathbb{R}$ em V, e V contém uma cópia de $\mathbb{R}$.

Usado em: Nota 1.12 (Dois elementos com escalares $\{0,1\}$)

prop-dois

Nota 1.12 (Dois elementos com escalares $\{0,1\}$)

Requer: Proposição 1.11 (Não existe espaço vetorial com dois elementos)

Na demonstração da Proposição 1.11 (Não existe espaço vetorial com dois elementos), a passagem $(\lambda-\mu)v = \lambda v - \mu v$ usa (D2) e o item (c) da Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1). A hipótese usada no fim é que $\mathbb{R}$ é infinito. Se os escalares forem só $\{0,1\}$, com $1+1=0$, existe um "espaço vetorial" com dois elementos.

Veja também: Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1)

nota-escalares-0-1

Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

$\mathbb{R}^n$, com soma e produto por escalar coordenada a coordenada, é um espaço vetorial. O vetor nulo é $(0,\dots,0)$ e $-(x_1,\dots,x_n) = (-x_1,\dots,-x_n)$. A verificação dos axiomas se reduz, coordenada a coordenada, a propriedades dos números reais.

Usado em: Definição 4.2 (Formas n-lineares alternadas), Exemplo 1.16 ($\mathbb{R}$ como espaço vetorial), Exemplo 2.51 (Em $\mathbb{R}^n$, testar independência é resolver um sistema homogêneo), Exemplo 2.38 ($e_1,\dots,e_n$ geram $\mathbb{R}^n$), Exemplo 1.69 ($\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$), Exemplo 1.70 ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$), Exemplo 2.48 ($e_1,\dots,e_n$ são LI em $\mathbb{R}^n$), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz), Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$), Exemplo 2.5 (Retas e planos pela origem), Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções), Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1,\dots,e_n$)

ex-basicos-a

Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, as matrizes $m \times n$, com soma e produto por escalar entrada a entrada, formam um espaço vetorial. A verificação dos axiomas se reduz, entrada a entrada, a propriedades dos números reais.

Usado em: Exemplo 1.47 (O determinante não é linear), Exemplo 2.39 (Geradores de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 1.70 ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz), Exemplo 1.43 (O traço é linear), Exemplo 2.7 (Matrizes simétricas e antissimétricas), Exemplo 1.42 (Transposição e multiplicação à esquerda), Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções)

ex-basicos-b

Exemplo 1.15 (Polinômios)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, os polinômios de grau *no máximo* n (incluindo o polinômio nulo), e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, todos os polinômios, com a soma e o produto por escalar usuais, são espaços vetoriais.

Usado em: Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear), Exemplo 1.39 (A derivada é linear), Exemplo 2.39 (Geradores de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 2.41 ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado), Exemplo 1.40 (A integral é linear), Exemplo 1.69 ($\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$), Exemplo 2.49 ($1, x, \dots, x^n$ são LI em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 2.50 (Uma lista "triangular" de polinômios é LI), Exemplo 6.5 (Produto interno de funções: a integral do produto), Exemplo 2.8 (Cadeias de subespaços de polinômios e de funções), Nota 1.18 (Polinômios de grau exatamente n)

ex-basicos-c

Exemplo 1.16 ($\mathbb{R}$ como espaço vetorial)

Requer: Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}$ ele mesmo, com a soma e o produto usuais, é um espaço vetorial: é o caso $n = 1$ do Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$).

Usado em: Exemplo 1.48 (O quadrado não é linear; as lineares $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

ex-basicos-d

Exemplo 1.17 (Espaço nulo)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

$\{0\}$, com $0 + 0 = 0$ e $\lambda 0 = 0$, é um espaço vetorial: o **espaço nulo**.

ex-basicos-e

Nota 1.18 (Polinômios de grau exatamente n)

Requer: Exemplo 1.15 (Polinômios)

"Os polinômios de grau *exatamente* n" não formam espaço vetorial com a soma e o produto por escalar usuais, para $n \geq 1$. A soma de $x^n + 1$ com $-x^n$ é 1, de grau 0: a soma sai do conjunto. E o conjunto não contém o polinômio nulo. É por isso que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é definido com "no máximo" (Exemplo 1.15 (Polinômios)).

nota-grau

Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Seja X um conjunto qualquer, e seja $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{R}$, com as operações ponto a ponto:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda\, f(x), \qquad x \in X.$$

Então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial. O vetor nulo é a função identicamente nula, e $(-f)(x) = -f(x)$.

Demonstração

Cada axioma é uma igualdade entre funções, e duas funções são iguais quando assumem o mesmo valor em cada $x \in X$. Avaliando em x, cada axioma vira a propriedade correspondente dos números reais. Por exemplo, (D1):

$$\big(\lambda(f + g)\big)(x) = \lambda\big(f(x) + g(x)\big) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f + \lambda g)(x).$$

Os outros sete são idênticos.

Usado em: Exemplo 1.32 ($\cos^2 t$ é combinação linear de 1 e $\cos 2t$), Exemplo 1.33 ($\operatorname{sen} t$ não é combinação linear de 1 e $\cos t$), Exemplo 2.29 (Funções pares e ímpares), Exemplo 2.61 ($1, \cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t$ são LD), Exemplo 2.62 ($1, t, t^2, \ldots$: uma família infinita LI), Exemplo 1.21 (Funções de classe C^k), Exemplo 1.22

(Polinômios como funções), Exemplo 1.23 (Soluções de $y'' + y = 0$), Exemplo 1.24 (Sequências convergentes e sequências de Fibonacci), Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções)

ex-fx

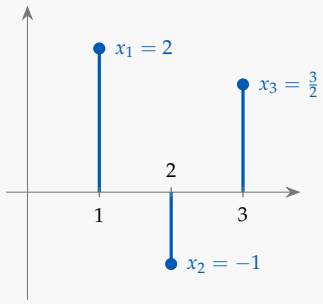
Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções)

Requer: Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

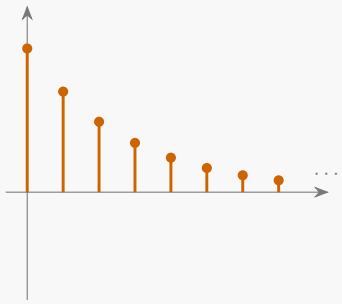
Três exemplos são casos de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ (Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)):

- $\mathbb{R}^n = \mathcal{F}(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$: a lista $(x_1, \ldots, x_n)$ *é* a função $i \mapsto x_i$, e a soma coordenada a coordenada *é* a soma ponto a ponto;
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = \mathcal{F}(\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}, \mathbb{R})$: a matriz (a_{ij}) é a função $(i, j) \mapsto a_{ij}$;
- as *sequências* reais formam $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$: a sequência $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ é a função $k \mapsto x_k$.

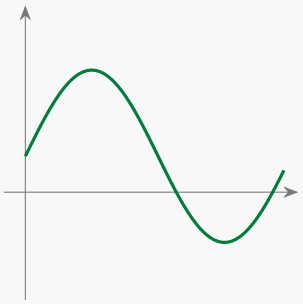
Um vetor de $\mathbb{R}^n$ é uma função definida em n pontos. Uma função $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um "vetor com uma coordenada para cada número real".



$(2, -1, \frac{3}{2}) \in \mathbb{R}^3$



$(2,\ 1{,}4,\ 0{,}98, \ldots) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$



$f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Três vetores, três gráficos. Um vetor de $\mathbb{R}^3$ é uma função em três pontos; uma sequência é uma função nos naturais; uma função real é o caso em que o conjunto de índices é $\mathbb{R}$. A soma, nos três casos, se faz ponto a ponto — isto é, coordenada a coordenada.

Usado em: Exemplo 1.65 (Deslocamentos nas sequências)

nota-rn-como-espaco-de-funcoes

Exemplo 1.21 (Funções de classe C^k)

Requer: Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

$C^k(I)$, as funções $I \to \mathbb{R}$ com k derivadas contínuas num intervalo I, é um espaço vetorial: é um subconjunto de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)), com as mesmas operações. $C^0(I)$ são as contínuas e $C^\infty(I)$ as que têm derivadas de todas as ordens.

Usado em: Exemplo 5.6 (Um funcional em $C^0([0,1])$), Exemplo 6.5 (Produto interno de funções: a integral do produto), Exemplo 2.8 (Cadeias de subespaços de polinômios e de funções), Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$)

ex-subconj-a

Exemplo 1.22 (Polinômios como funções)

Requer: Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

Os polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, vistos como funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, formam um subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)) que é um espaço vetorial com as mesmas operações.

Usado em: Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$)

`ex-subconj-b`

Exemplo 1.23 (Soluções de $y'' + y = 0$)

Requer: Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

O conjunto das soluções de $y'' + y = 0$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (entre as funções duas vezes deriváveis) é um espaço vetorial, com as mesmas operações de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)).

Usado em: Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$)

`ex-subconj-c`

Exemplo 1.24 (Sequências convergentes e sequências de Fibonacci)

Requer: Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

As sequências convergentes, e as sequências que satisfazem $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$ (as "de Fibonacci", com quaisquer dois termos iniciais), formam espaços vetoriais: cada um desses conjuntos é um subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)), com as mesmas operações.

Usado em: Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$)

`ex-subconj-d`

Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$)

Requer: Exemplo 1.21 (Funções de classe C^k), Exemplo 1.22 (Polinômios como funções), Exemplo 1.23 (Soluções de $y'' + y = 0$), Exemplo 1.24 (Sequências convergentes e sequências de Fibonacci)

Nos exemplos de subconjuntos de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ que são espaços vetoriais com as mesmas operações (Exemplo 1.21 (Funções de classe C^k), Exemplo 1.22 (Polinômios como funções), Exemplo 1.23 (Soluções de $y'' + y = 0$) e Exemplo 1.24 (Sequências convergentes e sequências de Fibonacci)), a verificação tem a mesma forma, e é curta. Os oito axiomas já valem em $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, logo continuam valendo para os elementos do subconjunto; só é preciso verificar que *as operações não saem do subconjunto* e que o vetor nulo e os simétricos estão nele. Para $C^k(I)$, a soma de funções C^k é C^k; para as soluções de $y'' + y = 0$, é a conta da Motivação 1.1 (Três situações com a mesma estrutura); para as sequências, o limite da soma é a soma dos limites, e se x e y satisfazem a recorrência, $x + \lambda y$ também satisfaz. Verifica-se sempre a mesma coisa: a operação não sai do conjunto. Esse padrão é formalizado no critério de subespaço (Proposição 2.3 (Critério de subespaço)).

Usado em: Motivação 2.1 (O argumento que vira definição), Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial) (dem.)

Veja também: Motivação 1.1 (Três situações com a mesma estrutura), Proposição 2.3 (Critério de subespaço)

nota-subconjuntos-de-funcoes

Exemplo 1.26 (Operações em $\mathbb{R}^2$ que não dão espaço vetorial)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Um espaço vetorial é um conjunto *com* duas operações. O mesmo conjunto pode ter operações diferentes, e com umas ser espaço vetorial e com outras não. Em $V = \mathbb{R}^2$:

(a) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ e $\alpha \odot (x, y) = (\alpha x, \alpha y)$. Falha (A2): $(1,0) \oplus (0,0) = (1,0)$, mas $(0,0) \oplus (1,0) = (0,0)$. O axioma (A3) vale, e vale para *qualquer* escolha de z como vetor nulo, porque $v \oplus z = v$ sempre. O que falha é (A4): fixado o vetor nulo z, a equação $v \oplus w = z$ diz $v = z$, e não tem solução w quando $v \neq z$. Falha também (D2): $(1+1) \odot (1,0) = (2,0)$, enquanto $1 \odot (1,0) \oplus 1 \odot (1,0) = (1,0)$. Os demais valem.

(b) $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$ e $\alpha \odot (x, y) = (x, \alpha y)$. A soma é a usual, logo (A1)–(A4) valem. (M1), (M2) e (D1) valem. Falha (D2):

$$(1+1) \odot (1,0) = (1,0), \qquad \text{mas} \qquad 1 \odot (1,0) \oplus 1 \odot (1,0) = (2,0).$$

ex-naoex

Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Em $V = \mathbb{R}^2$, ponha

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1,\ y_1 + y_2 + 2), \qquad \alpha \odot (x, y) = (\alpha x - \alpha + 1,\ \alpha y + 2\alpha - 2).$$

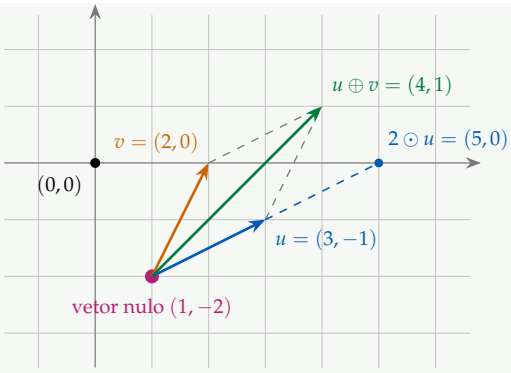
Isto *é* um espaço vetorial, e o vetor nulo é $(1, -2)$: de fato $(x, y) \oplus (1, -2) = (x + 1 - 1,\ y - 2 + 2) = (x, y)$. A explicação de todos os axiomas de uma vez é a mudança de coordenadas

$$\varphi(x, y) = (x - 1,\ y + 2),$$

que leva o ponto $(1, -2)$ na origem. Uma conta direta dá

$$\varphi(u \oplus v) = \varphi(u) + \varphi(v), \qquad \varphi(\alpha \odot u) = \alpha\, \varphi(u),$$

com as operações usuais do lado direito. Isto é: $\oplus$ e $\odot$ são a soma e o produto usuais, feitos a partir da origem $(1, -2)$ em vez de $(0, 0)$. Como φ é bijetora, cada axioma para $(\oplus, \odot)$ é o mesmo axioma para $(+, \cdot)$, transportado por φ.



A mesma geometria do plano, com a origem mudada de lugar. As flechas partem do vetor nulo $(1,-2)$, e $u \oplus v$ é a ponta da diagonal do paralelogramo. As fórmulas assustam; a figura mostra que nada de novo aconteceu.

Usado em: Exemplo 1.71 (Os espaços com operações exóticas são isomorfos aos usuais), Motivação 1.35 (Bijeções que transportam as operações)

Veja também: Exemplo 1.71 (Os espaços com operações exóticas são isomorfos aos usuais)

`ex-desloc`

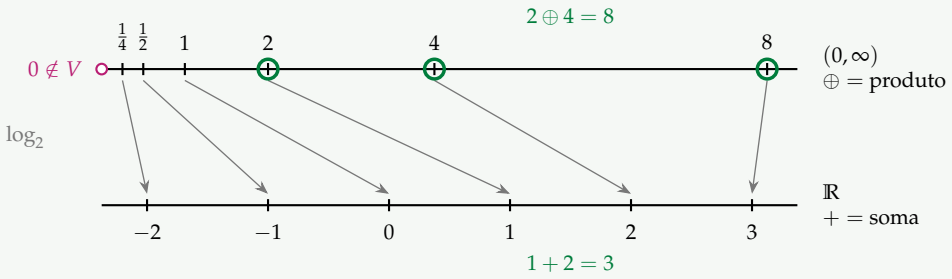
Exemplo 1.28 (Reais positivos com produto e potência)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Seja $V = (0, \infty)$, os reais positivos, com

$$x \oplus y = xy, \qquad \lambda \odot x = x^\lambda.$$

Os axiomas são as regras de potência: (D1) é $(xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda$, (D2) é $x^{\lambda+\mu} = x^\lambda x^\mu$, (M1) é $(x^\mu)^\lambda = x^{\lambda\mu}$, (M2) é $x^1 = x$. O vetor nulo é o número 1, porque $x \oplus 1 = x$; e o simétrico de x é $1/x$. Aqui o logaritmo faz o papel do φ do Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada): $\log(x \oplus y) = \log x + \log y$ e $\log(\lambda \odot x) = \lambda \log x$.



Os reais positivos com o produto, e o logaritmo que os transforma em $\mathbb{R}$ com a soma. O vetor nulo de cima é o 1, que vai no 0 de baixo. O número 0 não está no espaço de cima, e nenhum vetor dele "falta": todo real é o logaritmo de algum positivo.

Usado em: Exemplo 1.71 (Os espaços com operações exóticas são isomorfos aos usuais), Motivação 1.35 (Bijeções que transportam as operações)

Veja também: Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada), Exemplo 1.71 (Os espaços com operações exóticas são isomorfos aos usuais)

`ex-posit`

Definição 1.29 (Combinação linear)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Sejam $v_1, \ldots, v_k \in V$. Uma **combinação linear** de $v_1, \ldots, v_k$ é um vetor da forma

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k, \qquad a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}.$$

Os a_i são os **coeficientes** da combinação.

Usado em: Definição 2.17 (Subespaço gerado), Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Exemplo 1.31 (Combinação linear em $\mathbb{R}^3$), Exemplo 1.32 ($\cos^2 t$ é combinação linear de 1 e $\cos 2t$), Exemplo 1.33 ($\operatorname{sen} t$ não é combinação linear de 1 e $\cos t$), Nota 1.30 (Somas sem parênteses), Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares), Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador)

def-comb

Nota 1.30 (Somas sem parênteses)

Requer: Definição 1.29 (Combinação linear)

A expressão $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$ não tem parênteses, e isso precisa de justificativa. Por (A1), $(u + v) + w = u + (v + w)$; por indução em k, qualquer forma de pôr parênteses numa soma de k vetores dá o mesmo resultado, e por (A2) a ordem das parcelas também não importa. A indução não é feita aqui; é por causa dela que (A1) e (A2) estão na lista.

nota-parent

Exemplo 1.31 (Combinação linear em $\mathbb{R}^3$)

Requer: Definição 1.29 (Combinação linear)

Em $\mathbb{R}^3$, $(3, 1, 5)$ é combinação linear de $(1, 0, 1)$ e $(0, 1, 2)$:

$$(3, 1, 5) = 3(1, 0, 1) + (0, 1, 2).$$

ex-comb-a

Exemplo 1.32 ($\cos^2 t$ é combinação linear de 1 e $\cos 2t$)

Requer: Definição 1.29 (Combinação linear), Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\cos^2 t$ é combinação linear de 1 e $\cos 2t$, porque $\cos^2 t = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cos 2t$.

ex-comb-b

Exemplo 1.33 ($\operatorname{sen} t$ não é combinação linear de 1 e $\cos t$)

Requer: Definição 1.29 (Combinação linear), Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\operatorname{sen} t$ *não* é combinação linear de 1 e $\cos t$. Suponha que $\operatorname{sen} t = a + b \cos t$ para todo t. Avaliando em $t = 0$ e $t = \pi$:

$$0 = a + b, \qquad 0 = a - b,$$

logo $a = b = 0$, e então $\operatorname{sen} t = 0$ para todo t, o que é falso em $t = \pi/2$.

Usado em: Nota 1.34 (Igualdade de funções, ponto a ponto)

ex-comb-c

Nota 1.34 (Igualdade de funções, ponto a ponto)

Requer: Exemplo 1.33 (sen t não é combinação linear de 1 e cos t)

O Exemplo 1.33 (sen t não é combinação linear de 1 e cos t) usa uma técnica geral: uma igualdade entre funções vale em *cada* ponto, e escolher bem os pontos transforma a pergunta num sistema linear nos coeficientes. É usar a Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções) ao contrário: de uma função em $\mathbb{R}$ olhamos só algumas coordenadas.

Usado em: Exemplo 2.59 ($1, \cos t, \operatorname{sen} t$ são LI), Exemplo 2.60 (e^t, e^{2t} são LI)

Veja também: Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções)

`nota-avaliar-em-pontos`

Transformações lineares, isomorfismos, núcleo e imagem

Motivação 1.35 (Bijeções que transportam as operações)

Requer: Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada), Exemplo 1.28 (Reais positivos com produto e potência)

No Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada) e no Exemplo 1.28 (Reais positivos com produto e potência), uma bijeção φ transformava as operações estranhas nas usuais: $\varphi(u \oplus v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ e $\varphi(\lambda \odot u) = \lambda\varphi(u)$. Essas duas igualdades viram definição: a de transformação linear (Definição 1.36 (Transformação linear)).

Veja também: Definição 1.36 (Transformação linear)

`mot-transformacao-linear`

Definição 1.36 (Transformação linear)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma função $T : V \to W$ é uma **transformação linear** se, para todos $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(u+v) = T(u) + T(v) \qquad \text{e} \qquad T(\lambda v) = \lambda\, T(v).$$

Quando $V = W$, dizemos também que T é um **operador linear** em V.
As somas dos dois lados são em espaços diferentes: à esquerda soma-se em V, à direita em W. A definição diz que tanto faz somar antes ou depois de aplicar T; é a mesma frase para o produto por escalar. As duas condições são independentes, e as duas têm de ser verificadas: há funções $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que satisfazem $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ e não são lineares.

Usado em: Corolário 2.94 (Dimensões diferentes: T não é injetora, ou não é sobrejetora), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), Definição 4.2 (Formas n-lineares alternadas), Definição 7.2 (Formas bilineares), Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 1.66 (Isomorfismo), Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear), Exemplo 1.47 (O determinante não é linear), Exemplo 1.48 (O quadrado não é linear; as lineares $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$), Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares), Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear), Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial), Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$), Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única), Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador), Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta)

Veja também: Motivação 1.35 (Bijeções que transportam as operações)

`def-tl`

Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear), Definição 1.29 (Combinação linear)

A demonstração exige: Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1), Lema 1.5 (Cancelamento)

Seja $T : V \to W$ linear. Então:

(a) $T(0) = 0$ *e* $T(-v) = -T(v)$;

(b) $T(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = a_1T(v_1) + \cdots + a_kT(v_k)$ *para quaisquer* $v_i \in V$ *e* $a_i \in \mathbb{R}$;

(c) *reciprocamente, uma função* $T : V \to W$ *com* $T(u + \lambda v) = T(u) + \lambda T(v)$ *para todos* u, v, λ *é linear.*

O item (a) dá um teste rápido de não-linearidade: se $T(0) \neq 0$, T não é linear. O item (c) é o modo econômico de verificar linearidade: uma conta só, em vez de duas.

Demonstração

(a) $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0) = 0$, pela Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1), aplicada duas vezes (em V e em W). E $T(-v) = T((-1)v) = (-1)T(v) = -T(v)$.

(b) Indução em k. Para $k = 1$ é a segunda condição da definição. Supondo válido para $k - 1$,

$$T\Big(\sum_{i=1}^{k} a_iv_i\Big) = T\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_iv_i\Big) + T(a_kv_k) = \sum_{i=1}^{k-1} a_iT(v_i) + a_kT(v_k).$$

(c) Com $\lambda = 1$ obtemos a aditividade. Com $u = 0$ obtemos $T(\lambda v) = T(0) + \lambda T(v)$; e $T(0) = 0$ porque, com $u = v = 0$ e $\lambda = 1$, $T(0) = T(0) + T(0)$, e cancela-se.

Usado em: Exemplo 1.39 (A derivada é linear), Exemplo 1.40 (A integral é linear), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz), Exemplo 1.43 (O traço é linear), Exemplo 1.57 (Valores incompatíveis: não existe), Exemplo 1.46 (A translação não é linear), Exemplo 1.42 (Transposição e multiplicação à esquerda), Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear) (dem.), Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial) (dem.), Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo) (dem.), Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$) (dem.), Proposição 1.67 (A inversa de um isomorfismo é linear) (dem.), Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador) (dem.), Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa) (dem.)

`prop-basicas`

Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

Requer: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

Multiplicação por uma matriz. Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, a função $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T_A(X) = AX$ (vetores escritos como colunas), é linear. A linearidade é $A(X + \lambda Y) = AX + \lambda AY$, que é o item (c) da Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares).

Usado em: Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz), Definição 3.23 (Posto de uma matriz), Definição 3.19 (Sistema linear), Exemplo 2.96 (Sistemas homogêneos: dimensão do espaço de soluções), Exemplo 1.63 (Núcleo e imagem de uma $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$), Exemplo 1.44 (Rotação e projeção em $\mathbb{R}^2$), Exemplo 2.6 (Núcleo e imagem são subespaços), Nota 1.45 (Uma transformação linear do plano deforma a malha), Nota 1.61 (Sistemas lineares, antecipados)

`ex-multiplicacao-por-uma-matriz`

Exemplo 1.39 (A derivada é linear)

Requer: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares), Exemplo 1.15 (Polinômios)

Derivada. $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $D(p) = p'$, é linear. A verificação é uma linha, usando o item (c) da Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares).

Usado em: Exemplo 6.40 (A derivada nos polinômios trigonométricos é antiadjunta), Exemplo 1.50 (Derivada e integral: $D \circ J = \mathrm{Id}$, mas $J \circ D \neq \mathrm{Id}$), Exemplo 8.42 (Para a derivada, cada $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ é invariante), Exemplo 3.4 (A matriz da derivada em duas bases), Exemplo 1.62 (Núcleo e imagem da derivada), Exemplo 5.44 (Polinômios módulo as constantes), Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos)

`ex-derivada`

Exemplo 1.40 (A integral é linear)

Requer: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares), Exemplo 1.15 (Polinômios)

Integral. $J : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, $J(p)(x) = \int_0^x p(t)\,dt$, é linear. A verificação é uma linha, usando o item (c) da Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares).

Usado em: Exemplo 1.50 (Derivada e integral: $D \circ J = \mathrm{Id}$, mas $J \circ D \neq \mathrm{Id}$), Exemplo 1.62 (Núcleo e imagem da derivada)

`ex-integral`

Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear), Exemplo 1.15 (Polinômios)

Avaliação. Fixado $a \in \mathbb{R}$, a função $\mathrm{ev}_a : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{ev}_a(p) = p(a)$, é linear. A linearidade é a definição das operações ponto a ponto (Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)).

Usado em: Exemplo 5.4 (Funcionais em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 5.51 (Polinômios módulo os que se anulam em a), Exemplo 2.9 (Um conjunto dado por uma equação linear homogênea é um núcleo), Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações)

Veja também: Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

`ex-avaliacao`

Exemplo 1.42 (Transposição e multiplicação à esquerda)

Requer: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

Transposição e multiplicação à esquerda. São lineares $A \mapsto A^t$ em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e, fixada M, $A \mapsto MA$. A verificação é uma linha, usando o item (c) da Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares).

Usado em: Exemplo 4.31 (O determinante da multiplicação à esquerda), Exemplo 4.30 (O determinante da transposição)

`ex-transposicao-e-multiplicacao-a-esquerda`

Exemplo 1.43 (O traço é linear)

Requer: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

O traço. $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$, é linear. A verificação é uma linha, usando o item (c) da Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares).

Usado em: Exemplo 5.5 (Funcionais em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 1.64 (Núcleo e imagem do traço), Exem-

plo 6.4 (Produto interno de matrizes: $\operatorname{tr}(A^t B)$)

ex-o-traco

Exemplo 1.44 (Rotação e projeção em $\mathbb{R}^2$)

Requer: Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

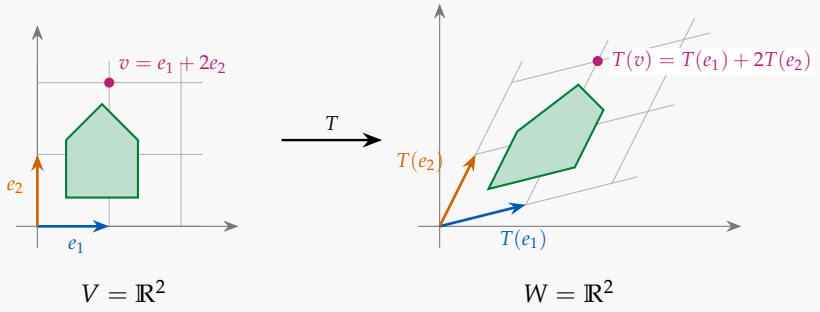
Rotação e projeção em $\mathbb{R}^2$. A rotação de ângulo θ, $R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta,\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta)$, e a projeção $P(x,y) = (x,0)$, são lineares. Ambas são da forma T_A (Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)). Geometricamente: rodar um paralelogramo dá um paralelogramo, e por isso rodar $u+v$ é o mesmo que somar os rodados.

Usado em: Exemplo 3.11 (Rotações e as fórmulas de adição), Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real)

ex-rotacao-e-projecao-em

Nota 1.45 (Uma transformação linear do plano deforma a malha)

Requer: Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)



Uma transformação linear do plano leva a malha quadriculada numa malha de paralelogramos, e retas em retas. A malha da direita fica inteira determinada pelas duas flechas $T(e_1)$ e $T(e_2)$: o ponto que tinha coordenadas $(1,2)$ na malha da esquerda vai no ponto de coordenadas $(1,2)$ na malha da direita. É a Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1,\dots,e_n$) em uma figura: as duas flechas da direita são as colunas da matriz (Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz)). A "casinha" verde mostra que a figura inteira se deforma, e não só os vetores da base.

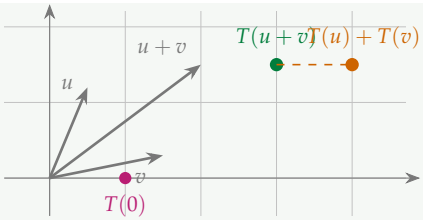
Veja também: Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1,\dots,e_n$), Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz)

nota-malha

Exemplo 1.46 (A translação não é linear)

Requer: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Translação. $T(x,y) = (x+1,y)$ não é linear: $T(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$, contra o item (a) da Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares). Na figura, $T(u+v)$ e $T(u)+T(v)$ diferem exatamente pelo deslocamento $(1,0)$ contado uma vez a mais.



A translação $T(x,y) = (x+1, y)$ não comuta com a soma. Ao calcular $T(u)+T(v)$, o deslocamento $(1,0)$ entra duas vezes; em $T(u+v)$, uma vez só. O ponto rosa, $T(0) \neq 0$, é o sintoma mais rápido de detectar.

`ex-translacao`

Exemplo 1.47 (O determinante não é linear)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

Determinante. $\det : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ não é linear: $\det(I+I) = 4 \neq 2 = \det I + \det I$. Também $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det A$.

`ex-determinante`

Exemplo 1.48 (O quadrado não é linear; as lineares $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear), Exemplo 1.16 ($\mathbb{R}$ como espaço vetorial)

Quadrado. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, não é linear: $f(2x) = 4f(x)$. As lineares $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são exatamente as $x \mapsto cx$, porque $f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1)$.

`ex-quadrado`

Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear)

A demonstração exige: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Se $T : V \to W$ e $S : W \to U$ são lineares, então $S \circ T : V \to U$ é linear.

Demonstração

$(S \circ T)(u + \lambda v) = S\big(T(u) + \lambda T(v)\big) = S(T(u)) + \lambda S(T(v))$.

Usado em: Exemplo 1.50 (Derivada e integral: $D \circ J = \mathrm{Id}$, mas $J \circ D \neq \mathrm{Id}$), Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes), Proposição 1.68 (Isomorfismo é uma relação de equivalência) (dem.), Proposição 5.16 (Propriedades da transposta) (dem.)

`prop-comp`

Exemplo 1.50 (Derivada e integral: $D \circ J = \mathrm{Id}$, mas $J \circ D \neq \mathrm{Id}$)

Requer: Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear), Exemplo 1.39 (A derivada é linear), Exemplo 1.40 (A integral é linear)

Com a derivada (Exemplo 1.39 (A derivada é linear)) e a integral (Exemplo 1.40 (A integral é linear)), no espaço $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de todos os polinômios:

$$D \circ J = \mathrm{Id}, \qquad \text{mas} \qquad (J \circ D)(p) = p - p(0).$$

A primeira é o teorema fundamental do cálculo; a segunda diz que $J \circ D$ perde a constante. Guarde este par: J tem inversa à esquerda e não à direita. Isso é impossível em dimensão finita (Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)) — e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não tem dimensão finita.

Veja também: Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)

`ex-dj`

Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear)

A demonstração exige: Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$), Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Seja $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto das transformações lineares de V em W, com as operações $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ e $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$. Então $\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial.

Demonstração

As operações são as de $\mathcal{F}(V, W)$, o espaço de todas as funções $V \to W$ com operações ponto a ponto, que é espaço vetorial pelo mesmo argumento do Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$) (só que com valores em W). Como na Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$), basta ver que as operações não saem de $\mathcal{L}(V, W)$, e que a função nula e $-T$ são lineares. Para a soma:

$$(T + S)(u + \mu v) = T(u) + \mu T(v) + S(u) + \mu S(v) = (T + S)(u) + \mu(T + S)(v);$$

o produto por escalar é igual, e $0 = 0 \cdot T$ e $-T = (-1)T$ são casos dele.

Usado em: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Motivação 5.1 (O caso $W = \mathbb{R}$ de $\mathcal{L}(V, W)$), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$)

Veja também: Proposição 2.3 (Critério de subespaço), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$)

`prop-espaco-das-transformacoes-lineares`

Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear), Definição 1.29 (Combinação linear)

A demonstração exige: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Dizemos que $v_1, \ldots, v_k$ **geram** V se todo $v \in V$ é combinação linear deles (veja também a Definição 2.37 (Conjunto gerador)).

Sejam $v_1, \ldots, v_k$ vetores que geram V, e $T, S : V \to W$ lineares com $T(v_i) = S(v_i)$ para todo i. Então $T = S$.

Demonstração

Dado $v \in V$, escreva $v = \sum_i a_i v_i$. Pelo item (b) da Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares),

$$T(v) = \sum_i a_i T(v_i) = \sum_i a_i S(v_i) = S(v).$$

Usado em: Motivação 3.1 (Por que uma transformação linear tem matriz), Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz) (dem.), Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$) (dem.), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$) (dem.), Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas) (dem.)

Veja também: Definição 2.37 (Conjunto gerador)

`prop-linear-determinada-nos-geradores`

Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

A demonstração exige: Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador)

Dados $w_1, \ldots, w_n \in W$ quaisquer, existe uma única transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to W$ com $T(e_i) = w_i$ para todo i, a saber

$$T(x_1, \ldots, x_n) = x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n.$$

A proposição vale com qualquer base no lugar de $e_1, \ldots, e_n$; para isso é preciso saber o que é base (Definição 2.64 (Base)).

Demonstração

A fórmula é linear: $T(x + \lambda y) = \sum_i (x_i + \lambda y_i) w_i = T(x) + \lambda T(y)$. E $T(e_i) = w_i$. A unicidade é a Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador), porque $e_1, \ldots, e_n$ geram $\mathbb{R}^n$.

Usado em: Exemplo 1.55 (Valores dados em e_1, e_2: existe e é única), Exemplo 1.56 (Valores dados em $(2,1)$ e $(-1,1)$: existe e é única), Motivação 3.1 (Por que uma transformação linear tem matriz), Exercício 3.47 (Existe $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?) (dem.), Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única) (dem.), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$) (dem.)

Veja também: Definição 2.64 (Base)

`prop-exist`

Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz)

Requer: Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

A demonstração exige: Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador)

Toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é $T = T_A$ para uma única matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$: a matriz cuja j-ésima coluna é $T(e_j)$.
É o caso $V = \mathbb{R}^n$, $W = \mathbb{R}^m$ da matriz de uma transformação linear em bases quaisquer (Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)).

Demonstração

$T_A(e_j) = Ae_j$ é a j-ésima coluna de A. Se escolhemos essa coluna igual a $T(e_j)$, então T_A e T coincidem nos e_j, e a Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador) dá $T = T_A$.

Usado em: Exemplo 5.3 (Funcionais em $\mathbb{R}^n$ são vetores-linha)

Veja também: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Nota 1.45 (Uma transformação linear do plano deforma a malha)

`cor-matriz`

Exemplo 1.55 (Valores dados em e_1, e_2: existe e é única)

Requer: Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \dots, e_n$)

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T(1,0) = (1,1,2)$ e $T(0,1) = (0,1,-1)$: existe e é única, $T(x,y) = (x,\ x+y,\ 2x-y)$.

ex-q23-a

Exemplo 1.56 (Valores dados em $(2,1)$ e $(-1,1)$: existe e é única)

Requer: Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \dots, e_n$)

Procura-se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T(2,1) = (3,1,-1)$ e $T(-1,1) = (1,0,2)$. Escrevemos e_1 e e_2 como combinações dos vetores dados:

$$e_1 = \tfrac{1}{3}\big[(2,1) - (-1,1)\big], \qquad e_2 = \tfrac{1}{3}\big[(2,1) + 2(-1,1)\big].$$

Se T existe, então obrigatoriamente

$$T(e_1) = \tfrac{1}{3}\big[(3,1,-1) - (1,0,2)\big] = \big(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -1\big), \qquad T(e_2) = \tfrac{1}{3}\big[(3,1,-1) + 2(1,0,2)\big] = \big(\tfrac{5}{3}, \tfrac{1}{3}, 1\big).$$

Reciprocamente, a transformação com esses valores em e_1, e_2 (Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \dots, e_n$)) satisfaz $T(2,1) = 2T(e_1) + T(e_2) = (3,1,-1)$ e $T(-1,1) = -T(e_1) + T(e_2) = (1,0,2)$. Existe e é única.

ex-q23-b

Exemplo 1.57 (Valores incompatíveis: não existe)

Requer: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(1,1) = (1,0)$ e $T(2,2) = (0,1)$: não existe, porque $(2,2) = 2(1,1)$ obriga $T(2,2) = 2T(1,1) = (2,0)$.
Os dados só são incompatíveis quando há uma relação linear entre os vetores de partida que não é respeitada pelos de chegada. É a semente da independência linear (Definição 2.44 (Independência e dependência linear)).

Usado em: Motivação 2.43 (Relações lineares e vetores que sobram)

Veja também: Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

ex-q23-c

Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear)

Seja $T : V \to W$ linear. O **núcleo** e a **imagem** de T são

$$\mathrm{N}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\} \subset V, \qquad \mathrm{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\} \subset W.$$

Os dois contêm o vetor nulo (de V e de W, respectivamente) e são fechados por combinações lineares: se $T(u) = T(v) = 0$ então $T(u + \lambda v) = 0$; e $T(u) + \lambda T(v) = T(u + \lambda v)$. Conjuntos assim são chamados *subespaços* (Definição 2.2 (Subespaço vetorial)).

Usado em: Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas), Definição 3.23 (Posto de uma matriz), Exemplo 3.6 (Matriz de uma transformação $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$), Exemplo 1.62 (Núcleo e

imagem da derivada), Exemplo 1.63 (Núcleo e imagem de uma $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$), Exemplo 1.64 (Núcleo e imagem do traço), Exemplo 2.6 (Núcleo e imagem são subespaços), Exercício 3.47 (Existe $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?), Exercício 3.46 (Existe $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?), Motivação 2.1 (O argumento que vira definição), Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos), Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A), Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo), Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$), Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π), Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta), Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear)

Veja também: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

`def-nucimg`

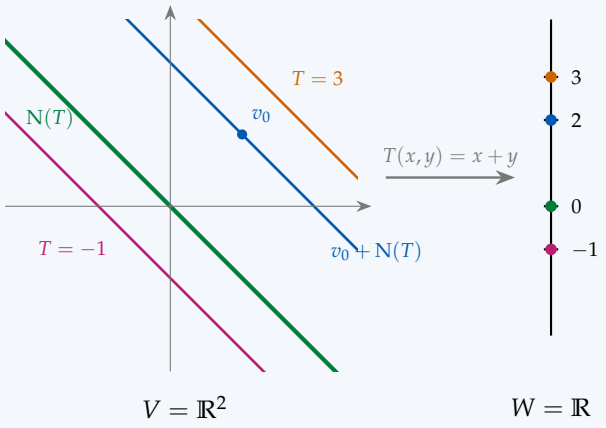
Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Seja $T : V \to W$ linear e $v_0 \in V$. Então

$$\{v \in V : T(v) = T(v_0)\} = v_0 + \mathrm{N}(T) := \{v_0 + u : u \in \mathrm{N}(T)\}.$$



As fibras de $T(x, y) = x + y$. Cada reta paralela ao núcleo (verde) é levada inteira num único ponto de $\mathbb{R}$: a reta azul, que passa por $v_0 = (1, 1)$, vai no 2. A proposição diz que isso vale sempre: as fibras de T são cópias transladadas do núcleo.

Leitura da figura: T é injetora exatamente quando as fibras têm um ponto só — e, como todas são cópias do núcleo, basta olhar o núcleo. É a Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$).

Demonstração

$T(v) = T(v_0) \iff T(v) - T(v_0) = 0 \iff T(v - v_0) = 0 \iff v - v_0 \in \mathrm{N}(T)$.

Usado em: Motivação 5.38 (Identificar vetores cuja diferença está num subespaço), Nota 1.61 (Sistemas lineares, antecipados), Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$) (dem.)

Veja também: Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

`prop-fibras`

Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo), Proposição 1.37

(Propriedades básicas das transformações lineares)

Uma transformação linear T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Se $T(v) = 0 = T(0)$, a injetividade dá $v = 0$. ($\Leftarrow$) Se $T(u) = T(v)$, a Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo) dá $u \in v + \mathrm{N}(T) = \{v\}$.

Usado em: Exemplo 1.65 (Deslocamentos nas sequências), Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração), Nota 2.26 (Basta testar a unicidade no zero), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora) (dem.), Proposição 8.2 (O autoespaço é um subespaço; $V_0 = \mathrm{N}(T)$) (dem.), Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas) (dem.), Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$) (dem.), Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única) (dem.)

`prop-inj`

Nota 1.61 (Sistemas lineares, antecipados)

Requer: Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

Sistemas lineares, antecipados. Com $T = T_A$, a Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo) diz: se X_0 é uma solução de $AX = b$, então *todas* as soluções são $X_0 + X_h$, com X_h solução do sistema homogêneo $AX = 0$. E $AX = b$ tem solução se e somente se $b \in \mathrm{Im}(T_A)$. É o esqueleto do estudo dos sistemas lineares (Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$) e Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A)).

Veja também: Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$), Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A)

`nota-sistemas`

Exemplo 1.62 (Núcleo e imagem da derivada)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Exemplo 1.39 (A derivada é linear), Exemplo 1.40 (A integral é linear)

$D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{N}(D)$ são os polinômios constantes e $\mathrm{Im}(D) = \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ (todo polinômio de grau $\leq n-1$ é derivada de sua integral). D não é injetora nem sobrejetora.

Usado em: Exemplo 5.47 (A derivada no quociente pelas constantes), Exemplo 2.98 (A derivada: núcleo e imagem contados)

`ex-nucimg-a`

Exemplo 1.63 (Núcleo e imagem de uma $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $N(T_A)$ é dado por $x + y = 0$, $y + z = 0$, isto é, $N(T_A) = \{t(1, -1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$, uma reta. A imagem é $\mathbb{R}^2$ inteiro, porque $T_A(e_1) = (1, 0)$ e $T_A(e_3) = (0, 1)$ já geram $\mathbb{R}^2$.

Usado em: Exemplo 5.52 ($\mathbb{R}^3/[(1,-1,1)] \cong \mathbb{R}^2$)

`ex-nucimg-b`

Exemplo 1.64 (Núcleo e imagem do traço)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Exemplo 1.43 (O traço é linear)

$\operatorname{tr} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$: a imagem é $\mathbb{R}$ (pois $\operatorname{tr}(\lambda E_{11}) = \lambda$), e o núcleo são as matrizes de traço nulo.

Usado em: Exemplo 2.97 (Dimensão das matrizes de traço nulo), Exemplo 5.50 (Matrizes módulo as de traço nulo)

`ex-nucimg-c`

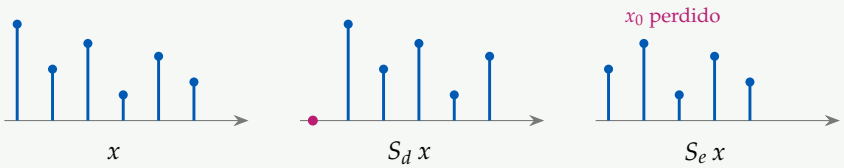
Exemplo 1.65 (Deslocamentos nas sequências)

Requer: Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$), Nota 1.20 ($\mathbb{R}^n$, matrizes e sequências como espaços de funções)

Deslocamentos nas sequências. Em $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, sejam

$$S_d(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots), \qquad S_e(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

S_d é injetora ($N(S_d) = \{0\}$) e não sobrejetora (a imagem são as sequências com $x_0 = 0$). S_e é sobrejetora e não injetora ($N(S_e)$ são as sequências nulas a partir do segundo termo). E $S_e \circ S_d = \mathrm{Id}$, enquanto $S_d \circ S_e \neq \mathrm{Id}$.



Os dois deslocamentos. S_d empurra tudo para a direita e põe um zero na frente (rosa): não perde informação, mas nunca produz uma sequência com $x_0 \neq 0$. S_e empurra para a esquerda e descarta x_0: atinge tudo, mas perde informação. Em dimensão finita esses dois comportamentos não podem ocorrer separados (Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)).

Veja também: Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), Exemplo 1.50 (Derivada e integral: $D \circ J = \mathrm{Id}$, mas $J \circ D \neq \mathrm{Id}$)

`ex-deslocamentos-nas-sequencias`

Definição 1.66 (Isomorfismo)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear)

Um **isomorfismo** é uma transformação linear bijetora. Se existe um isomorfismo $V \to W$, dizemos que V e W são **isomorfos** e escrevemos $V \cong W$.

Usado em: Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível), Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão), Exemplo 1.69 ($\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$), Exemplo 1.70 ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$), Nota 1.73 (O que quer dizer isomorfismo), Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha), Proposição 5.53 (Todo complementar de S é isomorfo a V/S), Proposição 1.68 (Isomorfismo é uma relação de equivalência), Proposição 1.67 (A inversa de um isomorfismo é linear), Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$), Proposição 4.24 (T é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$), Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa), Proposição 5.16 (Propriedades da transposta), Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha), Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$)

`def-iso`

Proposição 1.67 (A inversa de um isomorfismo é linear)

Requer: Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Se $T : V \to W$ é um isomorfismo, a função inversa $T^{-1} : W \to V$ é linear (e portanto também é um isomorfismo).

Demonstração

Sejam $w_1, w_2 \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, e ponha $v_i = T^{-1}(w_i)$. Pela linearidade de T,

$$T(v_1 + \lambda v_2) = w_1 + \lambda w_2,$$

isto é, $T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = v_1 + \lambda v_2 = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2)$.

Usado em: Exemplo 1.71 (Os espaços com operações exóticas são isomorfos aos usuais), Proposição 1.68 (Isomorfismo é uma relação de equivalência) (dem.)

`prop-inv`

Proposição 1.68 (Isomorfismo é uma relação de equivalência)

Requer: Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear), Proposição 1.67 (A inversa de um isomorfismo é linear)

A composta de isomorfismos é isomorfismo, e $\cong$ é uma relação de equivalência.

Demonstração

A composta de lineares é linear (Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear)) e a de bijeções é bijeção. A reflexividade é a identidade; a simetria é a Proposição 1.67 (A inversa de um isomorfismo é linear); a transitividade é a composta.

Usado em: Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão) (dem.)

`prop-equiv`

Exemplo 1.69 ($\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$)

Requer: Definição 1.66 (Isomorfismo), Exemplo 1.15 (Polinômios), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$ por $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto (a_0, \ldots, a_n)$.

Usado em: Exemplo 1.72 ($\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$)

`ex-iso-a`

Exemplo 1.70 ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$)

Requer: Definição 1.66 (Isomorfismo), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$, listando as entradas linha a linha.

Usado em: Exemplo 1.72 ($\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$)

`ex-iso-b`

Exemplo 1.71 (Os espaços com operações exóticas são isomorfos aos usuais)

Requer: Proposição 1.67 (A inversa de um isomorfismo é linear), Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada), Exemplo 1.28 (Reais positivos com produto e potência)

Nos exemplos Exemplo 1.27 ($\mathbb{R}^2$ com a origem deslocada) e Exemplo 1.28 (Reais positivos com produto e potência): $\varphi(x,y) = (x-1, y+2)$ é um isomorfismo do $\mathbb{R}^2$ com as operações $(\oplus, \odot)$ no $\mathbb{R}^2$ usual; e log é um isomorfismo dos reais positivos com o produto em $\mathbb{R}$ com a soma. A inversa do segundo é a exponencial, e a Proposição 1.67 (A inversa de um isomorfismo é linear) diz que ela é linear — isto é, que $e^{a+b} = e^a e^b$ e $e^{\lambda a} = (e^a)^\lambda$.

Veja também: Motivação 1.35 (Bijeções que transportam as operações)

`ex-iso-c`

Exemplo 1.72 ($\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$)

Requer: Exemplo 1.69 ($\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$), Exemplo 1.70 ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$)

$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, compondo os isomorfismos do Exemplo 1.69 ($\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$) e do Exemplo 1.70 ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{mn}$): $\mathbb{R}^4$ está no meio.

Veja também: Proposição 1.68 (Isomorfismo é uma relação de equivalência)

`ex-iso-d`

Nota 1.73 (O que quer dizer isomorfismo)

Requer: Definição 1.66 (Isomorfismo)

Isomorfismo quer dizer: *o mesmo espaço, com os vetores com outros nomes*. Toda afirmação que só use as operações — "estes vetores geram", "este conjunto é fechado para combinações" — é verdadeira num espaço se e somente se é verdadeira no outro. Isso não vale para afirmações que usem estrutura extra: "p tem uma raiz" faz sentido em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e não em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

A pergunta "quando dois espaços são isomorfos?" tem resposta em dimensão finita: quando têm a mesma dimensão (Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão)).

Veja também: Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão)

`nota-iso`

Capítulo 2

Subespaços, geradores e bases

Subespaços: interseção, soma e soma direta

Motivação 2.1 (O argumento que vira definição)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$)

Para $T : V \to W$ linear, os conjuntos $\mathrm{N}(T) \subset V$ e $\mathrm{Im}(T) \subset W$ contêm o vetor nulo e são fechados por combinações lineares (Definição 1.58 (Núcleo e imagem)). E o mesmo argumento apareceu duas vezes, na Nota 1.25 (Verificação dos axiomas num subconjunto de $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$) e na Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V,W)$ é um espaço vetorial): os axiomas são herdados do espaço maior, e só é preciso verificar que as operações não saem do subconjunto. Esse argumento vira definição (Definição 2.2 (Subespaço vetorial)) e critério (Proposição 2.3 (Critério de subespaço)).

Veja também: Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V,W)$ é um espaço vetorial), Definição 2.2 (Subespaço vetorial), Proposição 2.3 (Critério de subespaço)

`mot-subespaco`

Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Um subconjunto S de um espaço vetorial V é um **subespaço vetorial** de V se

(i) $0 \in S$;

(ii) $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$;

(iii) $v \in S, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in S$.

A condição (i) garante que S não é vazio, e é o teste mais rápido de não-subespaço: se $0 \notin S$, acabou. Pode-se trocar (i) por "$S \neq \emptyset$", mas é (i) que se verifica na prática.

Usado em: Definição 2.17 (Subespaço gerado), Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 6.21 (Complemento ortogonal), Definição 5.39 (Classes módulo um subespaço; o conjunto V/S), Definição 2.19 (Soma de subespaços), Exemplo 2.10 (Não-subespaço: falha a condição (i)), Exemplo 2.11 (Não-subespaço: falha só a condição (ii)), Exemplo 2.12 (Não-subespaço: falha só a condição (iii)), Exemplo 2.4 (Subespaços triviais), Exemplo 2.5 (Retas e planos pela origem), Exemplo 2.6 (Núcleo e imagem são subespaços), Exemplo 2.8 (Cadeias de subespaços de polinômios e de funções), Exercício 2.14 (Fechado por somas e diferenças é subespaço?), Proposição 2.3 (Critério de subespaço), Proposição 2.15 (A interseção de subespaços é subespaço), Proposição 2.16 (Quando a união de dois subespaços é subespaço)

Veja também: Motivação 2.1 (O argumento que vira definição)

`def-sub`

Proposição 2.3 (Critério de subespaço)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

A demonstração exige: Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1)

Se S é subespaço de V, então S, com a soma e o produto por escalar de V restritos a S, é um espaço vetorial. Além disso, as condições (ii) e (iii) juntas equivalem a: $u + \lambda v \in S$ para todos $u, v \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração

Por (ii) e (iii), as operações de V restritas a S têm valores em S. Os axiomas (A1), (A2), (M1), (M2), (D1), (D2) são igualdades que valem para todos os vetores de V, logo em particular para os de S. (A3): o vetor nulo de V está em S por (i). (A4): se $v \in S$, então $-v = (-1)v \in S$ por (iii) e pelo item (c) da Proposição 1.7 (Produto por zero e por -1).

Para a segunda afirmação: se (ii) e (iii) valem, $\lambda v \in S$ e então $u + \lambda v \in S$. Reciprocamente, $\lambda = 1$ dá (ii) e $u = 0$ dá (iii) (usando (i)).

Usado em: Exemplo 2.7 (Matrizes simétricas e antissimétricas), Proposição 2.15 (A interseção de subespaços é subespaço) (dem.)

`prop-crit`

Exemplo 2.4 (Subespaços triviais)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

$\{0\}$ e V são subespaços de V (os *triviais*).

`ex-sub-a`

Exemplo 2.5 (Retas e planos pela origem)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

Em $\mathbb{R}^2$, as retas pela origem, $\{t\,v : t \in \mathbb{R}\}$ com $v \neq 0$, são subespaços. Em $\mathbb{R}^3$, as retas e os planos pela origem.

Usado em: Nota 2.13 (Subespaços e não-subespaços de $\mathbb{R}^2$)

`ex-sub-b`

Exemplo 2.6 (Núcleo e imagem são subespaços)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial), Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

$\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$, para T linear, são subespaços (Definição 1.58 (Núcleo e imagem)). Em particular, o conjunto solução de um sistema homogêneo $AX = 0$ é o subespaço $N(T_A)$ de $\mathbb{R}^n$.

Usado em: Exemplo 2.9 (Um conjunto dado por uma equação linear homogênea é um núcleo), Proposição 8.2 (O autoespaço é um subespaço; $V_0 = \mathrm{N}(T)$)

`ex-sub-c`

Exemplo 2.7 (Matrizes simétricas e antissimétricas)

Requer: Proposição 2.3 (Critério de subespaço), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

Sim $= \{A : A^t = A\}$ e $\mathcal{A} = \{A : A^t = -A\}$ são subespaços de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$: $(A + \lambda B)^t = A^t + \lambda B^t$.

Usado em: Exemplo 2.77 (Dimensão das matrizes simétricas e das antissimétricas), Exemplo 2.23 (Toda matriz é soma de uma simétrica e uma antissimétrica)

ex-sub-d

Exemplo 2.8 (Cadeias de subespaços de polinômios e de funções)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial), Exemplo 1.15 (Polinômios), Exemplo 1.21 (Funções de classe C^k)

$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$; $C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Em cada inclusão, o conjunto menor é subespaço do maior.

ex-sub-e

Exemplo 2.9 (Um conjunto dado por uma equação linear homogênea é um núcleo)

Requer: Exemplo 2.6 (Núcleo e imagem são subespaços), Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear)

$\{p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R}) : p(0) = 2p(1)\}$ é subespaço de $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$: é o núcleo da transformação linear $p \mapsto p(0) - 2p(1)$ (Exemplo 2.6 (Núcleo e imagem são subespaços)).
O truque é geral: *um subconjunto definido por equações lineares homogêneas é um núcleo*, e portanto é subespaço sem conta nenhuma.

ex-sub-f

Exemplo 2.10 (Não-subespaço: falha a condição (i))

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Cada uma das três condições da Definição 2.2 (Subespaço vetorial) pode falhar sozinha.

Falha (i) apenas. $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \det A \neq 0\}$ não contém 0. (Também falha (ii): $I + (-I) = 0$.) Um exemplo em que *só* (i) falha: $\emptyset$.

Veja também: Nota 2.13 (Subespaços e não-subespaços de $\mathbb{R}^2$)

ex-falha-i-apenas

Exemplo 2.11 (Não-subespaço: falha só a condição (ii))

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Cada uma das três condições da Definição 2.2 (Subespaço vetorial) pode falhar sozinha.

Falha (ii) apenas. $\{(x,y,z) : x^2 = y^2\}$ contém 0 e é fechado por múltiplos, mas $(1,1,0) + (1,-1,0) = (2,0,0)$ não satisfaz $x^2 = y^2$. É a união de dois planos, $x = y$ e $x = -y$.

Veja também: Nota 2.13 (Subespaços e não-subespaços de $\mathbb{R}^2$)

ex-falha-ii-apenas

Exemplo 2.12 (Não-subespaço: falha só a condição (iii))

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Cada uma das três condições da Definição 2.2 (Subespaço vetorial) pode falhar sozinha.

Falha (iii) apenas. $\{(x, y, z) : x \in \mathbb{Z}\}$ contém 0 e é fechado por somas, mas $\frac{1}{2}(1, 0, 0)$ não está nele. Também $\{p \in P_3 : p(t) \geq 0 \ \forall t\}$: contém 0, é fechado por somas, mas $-1 \cdot p$ sai do conjunto quando $p \neq 0$.

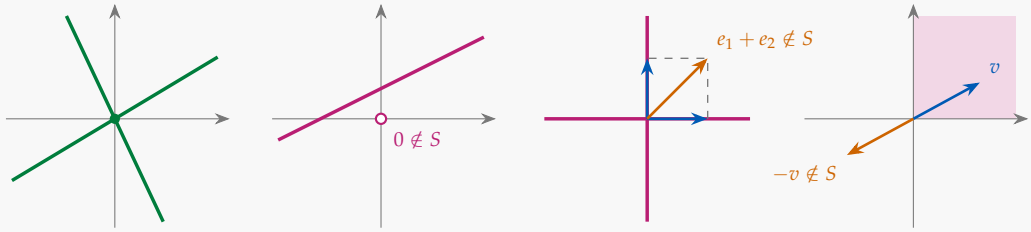
Usado em: Exercício 2.14 (Fechado por somas e diferenças é subespaço?) (dem.)

Veja também: Nota 2.13 (Subespaços e não-subespaços de $\mathbb{R}^2$)

`ex-falha-iii-apenas`

Nota 2.13 (Subespaços e não-subespaços de $\mathbb{R}^2$)

Requer: Exemplo 2.5 (Retas e planos pela origem)



subespaços | falha (i) | falha (ii) | falha (iii)

Em $\mathbb{R}^2$, os subespaços não triviais são exatamente as retas pela origem. Os outros três painéis são conjuntos que falham, cada um, numa das três condições da Definição 2.2 (Subespaço vetorial): uma reta que não passa pela origem; a união dos dois eixos, que não é fechada pela soma; o primeiro quadrante, que é fechado pela soma mas não por múltiplos negativos. O terceiro painel é a união de dois subespaços (Proposição 2.16 (Quando a união de dois subespaços é subespaço)).

Veja também: Exemplo 2.10 (Não-subespaço: falha a condição (i)), Exemplo 2.11 (Não-subespaço: falha só a condição (ii)), Exemplo 2.12 (Não-subespaço: falha só a condição (iii)), Proposição 2.16 (Quando a união de dois subespaços é subespaço)

`nota-subespacos-do-plano`

Exercício 2.14 (Fechado por somas e diferenças é subespaço?)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

A demonstração exige: Exemplo 2.12 (Não-subespaço: falha só a condição (iii))

Verdadeiro ou falso? *Se $A \subset V$ é não vazio e $u + v$, $u - v \in A$ para todos $u, v \in A$, então A é subespaço.*

Resolução

Falso. Em $V = \mathbb{R}$, o conjunto $A = \mathbb{Z}$ dos inteiros satisfaz as hipóteses e não é fechado por múltiplos. A hipótese garante (i) e (ii), e nada diz sobre (iii) — é o Exemplo 2.12 (Não-subespaço: falha só a condição (iii)), em dimensão um.

`exerc-fechado-por-somas-e-diferencas`

Proposição 2.15 (A interseção de subespaços é subespaço)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

A demonstração exige: Proposição 2.3 (Critério de subespaço)

A interseção de uma família qualquer de subespaços de V é um subespaço de V.

Demonstração

Sejam S_i, $i \in I$, subespaços, e $S = \bigcap_i S_i$. O vetor nulo está em todos, logo em S. Se $u, v \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $u, v \in S_i$ para todo i, logo $u + \lambda v \in S_i$ para todo i, isto é, $u + \lambda v \in S$.

`prop-interseccao-de-subespacos`

Proposição 2.16 (Quando a união de dois subespaços é subespaço)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Sejam S_1, S_2 subespaços de V. Então $S_1 \cup S_2$ é subespaço se e somente se $S_1 \subset S_2$ ou $S_2 \subset S_1$.
A demonstração é o terceiro painel da Nota 2.13 (Subespaços e não-subespaços de $\mathbb{R}^2$) em geral: e_1 está num eixo e não no outro, e_2 idem, e $e_1 + e_2$ não está em nenhum; s_1 é o e_1, s_2 é o e_2. A pergunta que fica: se a união não serve, qual é o menor subespaço que contém S_1 e S_2? É a soma (Proposição 2.20 ($S_1 + S_2$ é o menor subespaço que contém $S_1 \cup S_2$)).

Demonstração

Se $S_1 \subset S_2$, a união é S_2; e analogamente no outro caso. Reciprocamente, suponha que nenhum contenha o outro: existem $s_1 \in S_1 \setminus S_2$ e $s_2 \in S_2 \setminus S_1$. Afirmamos que $s_1 + s_2 \notin S_1 \cup S_2$. Se estivesse em S_1, então $s_2 = (s_1 + s_2) - s_1 \in S_1$, contra a escolha de s_2. Se estivesse em S_2, então $s_1 = (s_1 + s_2) - s_2 \in S_2$, contra a escolha de s_1. Logo a união não é fechada pela soma.

Usado em: Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos)

Veja também: Nota 2.13 (Subespaços e não-subespaços de $\mathbb{R}^2$), Proposição 2.20 ($S_1 + S_2$ é o menor subespaço que contém $S_1 \cup S_2$)

`prop-uniao`

Definição 2.17 (Subespaço gerado)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial), Definição 1.29 (Combinação linear)

Seja $A \subset V$ não vazio. O **subespaço gerado** por A é o conjunto das combinações lineares de elementos de A:

$$[A] = \{a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k : \ k \geq 1, \ v_i \in A, \ a_i \in \mathbb{R}\}.$$

Convenciona-se $[\varnothing] = \{0\}$. Se $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$, escrevemos $[v_1, \ldots, v_k]$.

Usado em: Definição 2.37 (Conjunto gerador), Exemplo 2.21 (Soma de duas retas), Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado), Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais), Proposição 2.18 ($[A]$ é o menor subespaço que contém A), Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução), Proposição 2.20 ($S_1 + S_2$ é o menor subespaço que contém $S_1 \cup S_2$), Teorema 6.17 (Gram–Schmidt)

`def-gerado`

Proposição 2.18 ($[A]$ é o menor subespaço que contém A)

Requer: Definição 2.17 (Subespaço gerado)

$[A]$ é um subespaço de V que contém A, e está contido em qualquer subespaço que contenha A. Isto é: $[A]$ é o menor subespaço de V que contém A.

Demonstração

Subespaço: $0 = 0 \cdot v$ para qualquer $v \in A$; a soma de duas combinações lineares de elementos de A é uma combinação linear de elementos de A (junte as duas listas), e um múltiplo também. *Contém A:* $v = 1 \cdot v$. *É o menor:* se S é subespaço e $A \subset S$, então, aplicando repetidamente (ii) e (iii), toda combinação linear de elementos de A está em S.

Usado em: Proposição 2.20 ($S_1 + S_2$ é o menor subespaço que contém $S_1 \cup S_2$) (dem.)

`prop-menor`

Definição 2.19 (Soma de subespaços)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Sejam S_1, S_2 subespaços de V. A **soma** de S_1 e S_2 é

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}.$$

Usado em: Corolário 5.54 (Segundo teorema do isomorfismo), Definição 2.24 (Soma direta), Exemplo 8.41 (Interseção e soma de invariantes são invariantes), Exemplo 2.21 (Soma de duas retas), Exemplo 2.22 (Soma de dois planos de $\mathbb{R}^3$: a decomposição não é única), Exemplo 2.23 (Toda matriz é soma de uma simétrica e uma antissimétrica), Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção), Proposição 2.20 ($S_1 + S_2$ é o menor subespaço que contém $S_1 \cup S_2$), Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)

`def-soma`

Proposição 2.20 ($S_1 + S_2$ é o menor subespaço que contém $S_1 \cup S_2$)

Requer: Definição 2.19 (Soma de subespaços), Definição 2.17 (Subespaço gerado)

A demonstração exige: Proposição 2.18 ($[A]$ é o menor subespaço que contém A)

$S_1 + S_2$ é o menor subespaço de V que contém $S_1 \cup S_2$; isto é, $S_1 + S_2 = [S_1 \cup S_2]$. Em particular, se $S_1 = [A_1]$ e $S_2 = [A_2]$, então $S_1 + S_2 = [A_1 \cup A_2]$.

Demonstração

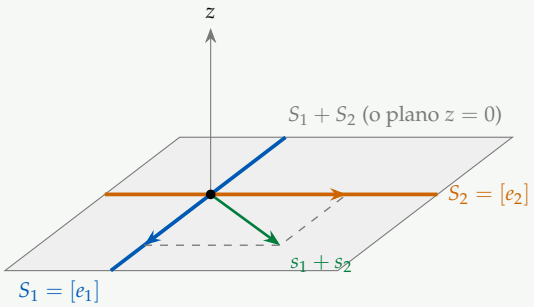
Subespaço: $0 = 0 + 0$; e $(s_1 + s_2) + \lambda(t_1 + t_2) = (s_1 + \lambda t_1) + (s_2 + \lambda t_2)$. *Contém* $S_1 \cup S_2$: $s_1 = s_1 + 0$ e $s_2 = 0 + s_2$. *É o menor:* um subespaço que contenha S_1 e S_2 contém as somas $s_1 + s_2$, por (ii). A última afirmação: $[A_1 \cup A_2]$ contém A_1 e A_2, logo contém S_1 e S_2 (Proposição 2.18 ($[A]$ é o menor subespaço que contém A)), logo contém $S_1 + S_2$; e $S_1 + S_2$ é subespaço e contém $A_1 \cup A_2$, logo contém $[A_1 \cup A_2]$.

`prop-soma`

Exemplo 2.21 (Soma de duas retas)

Requer: Definição 2.19 (Soma de subespaços), Definição 2.17 (Subespaço gerado)

Em $\mathbb{R}^3$, $[e_1] + [e_2]$ é o plano $z = 0$. Em $\mathbb{R}^2$, a soma de duas retas distintas pela origem é $\mathbb{R}^2$.



A soma de duas retas de $\mathbb{R}^3$ é o plano que elas determinam. Cada vetor do plano é a diagonal de um paralelogramo com lados nas duas retas. A união das retas, ao contrário, é só a "cruz" colorida.

ex-somas-a

Exemplo 2.22 (Soma de dois planos de $\mathbb{R}^3$: a decomposição não é única)

Requer: Definição 2.19 (Soma de subespaços)

Em $\mathbb{R}^3$, o plano $z = 0$ somado com o plano $x = 0$ é $\mathbb{R}^3$: $(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)$. Mas a interseção deles é o eixo y, e a escrita não é única: $(a, b, c) = (a, b - t, 0) + (0, t, c)$ para todo t.
A soma dá tudo, mas a decomposição não é única. A liberdade vem da interseção: é a Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta).

Usado em: Exemplo 2.31 (Uma soma que não é direta)

Veja também: Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta)

ex-somas-b

Exemplo 2.23 (Toda matriz é soma de uma simétrica e uma antissimétrica)

Requer: Definição 2.19 (Soma de subespaços), Exemplo 2.7 (Matrizes simétricas e antissimétricas)

Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sim} + \mathcal{A}$ é o espaço todo:

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^t) + \tfrac{1}{2}(A - A^t),$$

com a primeira parcela simétrica e a segunda antissimétrica.

Usado em: Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)

ex-somas-c

Definição 2.24 (Soma direta)

Requer: Definição 2.19 (Soma de subespaços)

Dizemos que V é **soma direta** dos subespaços S_1 e S_2, e escrevemos $V = S_1 \oplus S_2$, quando

$$V = S_1 + S_2 \qquad \text{e} \qquad S_1 \cap S_2 = \{0\}.$$

Nesse caso, S_2 é um **complementar** de S_1 em V (e vice-versa).

Usado em: Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar), Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam), Exemplo 2.27 ($\mathbb{R}^2$ é soma direta de duas retas distintas), Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Exemplo 2.29 (Funções pares e ímpares), Exemplo 2.31 (Uma soma que não é direta), Proposição 5.53 (Todo complementar de S é isomorfo a V/S), Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta), Proposição 2.91

(Dimensão do produto; soma direta interna e externa), Teorema 8.23 (Critério de diagonalização), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^{\perp}$)

`def-direta`

Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta)

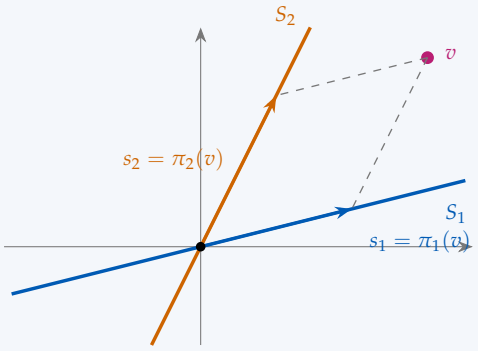
Requer: Definição 2.24 (Soma direta)

Sejam S_1, S_2 subespaços de V. São equivalentes:

(a) $V = S_1 \oplus S_2$;

(b) *todo $v \in V$ se escreve de* uma única *maneira como $v = s_1 + s_2$, com $s_1 \in S_1$ e $s_2 \in S_2$;*

(c) $V = S_1 + S_2$, *e $s_1 + s_2 = 0$ com $s_i \in S_i$ implica $s_1 = s_2 = 0$.*



$\mathbb{R}^2 = S_1 \oplus S_2$ *com duas retas quaisquer (não necessariamente perpendiculares). Por v traçam-se paralelas às duas retas; os cortes dão s_1 e s_2, e só há uma maneira de fazê-lo. As componentes $\pi_1(v)$ e $\pi_2(v)$ dependem das* duas *retas: mudando S_2, muda também $\pi_1(v)$.*

Demonstração

(a)⇒(b). A existência é $V = S_1 + S_2$. Se $s_1 + s_2 = t_1 + t_2$, então

$$s_1 - t_1 = t_2 - s_2.$$

O lado esquerdo está em S_1 e o direito em S_2; logo os dois estão em $S_1 \cap S_2 = \{0\}$, e $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$.

(b)⇒(c). $0 = 0 + 0$ é uma decomposição de 0; pela unicidade, é a única.

(c)⇒(a). Se $v \in S_1 \cap S_2$, então $v + (-v) = 0$ com $v \in S_1$ e $-v \in S_2$; por (c), $v = 0$.

Usado em: Nota 2.32 (Soma direta de três ou mais subespaços), Nota 2.26 (Basta testar a unicidade no zero), Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta), Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa) (dem.)

`prop-direta`

Nota 2.26 (Basta testar a unicidade no zero)

Requer: Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta), Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

A forma (c) da Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta) é a que se generaliza e a que se usa nas demonstrações: *basta testar a unicidade na decomposição do zero*. Há uma analogia com a Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$): T injetora $\iff \mathrm{N}(T) = \{0\}$ também reduz uma unicidade qualquer à unicidade no zero. Não é

coincidência: (c) diz que a transformação linear $(s_1, s_2) \mapsto s_1 + s_2$ tem núcleo nulo. Esse ponto de vista usa o produto cartesiano (Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais)).

Veja também: Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais)

nota-unicidade-no-zero

Exemplo 2.27 ($\mathbb{R}^2$ é soma direta de duas retas distintas)

Requer: Definição 2.24 (Soma direta)

$\mathbb{R}^2 = S_1 \oplus S_2$ para quaisquer duas retas distintas pela origem.

Veja também: Nota 2.34 (Decomposição do plano em duas retas oblíquas)

ex-diretas-a

Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)

Requer: Definição 2.24 (Soma direta), Exemplo 2.23 (Toda matriz é soma de uma simétrica e uma antissimétrica)

$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$. A soma dá tudo (Exemplo 2.23 (Toda matriz é soma de uma simétrica e uma antissimétrica)); e se $A \in \mathrm{Sim} \cap \mathcal{A}$, então $A = A^t = -A$, donde $A = 0$. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Usado em: Exemplo 6.24 (Matrizes simétricas e antissimétricas são ortogonais), Exemplo 2.35 (A projeção sobre as matrizes simétricas), Exemplo 2.88 (As dimensões confirmam $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Exemplo 8.19 (Os autoespaços da transposição), Nota 2.30 (Simétrica e antissimétrica, par e ímpar: a mesma conta), Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas) (dem.)

ex-diretas-b

Exemplo 2.29 (Funções pares e ímpares)

Requer: Definição 2.24 (Soma direta), Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, as funções pares e as ímpares:

$$f(x) = \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)}_{\text{par}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)}_{\text{ímpar}},$$

e uma função par e ímpar satisfaz $f(x) = f(-x) = -f(x)$, logo é nula. Para $f = e^x$, a decomposição é $e^x = \cosh x + \operatorname{senh} x$.

Usado em: Nota 2.30 (Simétrica e antissimétrica, par e ímpar: a mesma conta)

ex-diretas-c

Nota 2.30 (Simétrica e antissimétrica, par e ímpar: a mesma conta)

Requer: Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Exemplo 2.29 (Funções pares e ímpares)

O Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$) e o Exemplo 2.29 (Funções pares e ímpares)

são a mesma conta: "parte simétrica e antissimétrica" e "parte par e ímpar" são a média de um vetor com a sua imagem por uma operação que, feita duas vezes, dá a identidade ($A \mapsto A^t$, $f(x) \mapsto f(-x)$). Os dois subespaços de cada decomposição são os autoespaços de autovalores $+1$ e -1 dessas operações (Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)).

Veja também: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

`nota-media-com-uma-involucao`

Exemplo 2.31 (Uma soma que não é direta)

Requer: Definição 2.24 (Soma direta), Exemplo 2.22 (Soma de dois planos de $\mathbb{R}^3$: a decomposição não é única)

Não-exemplo. $\mathbb{R}^3$ com o plano $z = 0$ e o plano $x = 0$: a soma é $\mathbb{R}^3$ mas não é direta (Exemplo 2.22 (Soma de dois planos de $\mathbb{R}^3$: a decomposição não é única)).

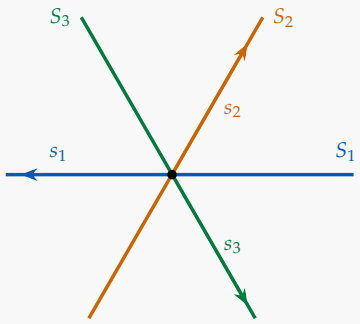
`ex-soma-nao-direta`

Nota 2.32 (Soma direta de três ou mais subespaços)

Requer: Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta)

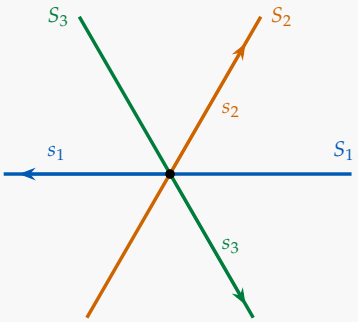
Com três ou mais subespaços, interseções duas a duas nulas não bastam. Em $\mathbb{R}^2$, tome três retas distintas S_1, S_2, S_3 pela origem. Elas se intersectam duas a duas só em 0, mas a decomposição de um vetor como $s_1 + s_2 + s_3$ não é única: o zero se escreve como soma de três vetores não nulos, um em cada reta. A definição correta de $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$ é a versão (b) (ou (c)) da Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta): unicidade da decomposição.

O mesmo desenho refuta a igualdade $S_1 \cap (S_2 + S_3) = (S_1 \cap S_2) + (S_1 \cap S_3)$, a "lei distributiva" entre $\cap$ e $+$: o lado esquerdo é $S_1 \cap \mathbb{R}^2 = S_1$, e o direito é $\{0\} + \{0\} = \{0\}$.



$s_1 + s_2 + s_3 = 0$,
com $s_i \neq 0$;
$S_i \cap S_j = \{0\}$ para $i \neq j$,
e a soma não é direta.

Três retas no plano. Duas a duas, as interseções são nulas; mas os três vetores coloridos somam zero, e então o zero tem duas decomposições. A definição de soma direta de muitos subespaços tem de ser a da unicidade.



$s_1 + s_2 + s_3 = 0$,
com $s_i \neq 0$;
$S_i \cap S_j = \{0\}$ para $i \neq j$,
e a soma não é direta.

Três retas no plano. Duas a duas, as interseções são nulas; mas os três vetores coloridos somam zero, e então o zero tem duas decomposições. A definição de soma direta de muitos subespaços tem de ser a da unicidade.

Usado em: Corolário 8.16 (No máximo n autovalores; a soma dos autoespaços é direta) (dem.)

`nota-tres`

Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)

Requer: Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta), Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

Seja $V = S_1 \oplus S_2$ e, para $v = s_1 + s_2$ (a única decomposição), ponha $\pi_1(v) = s_1$ e $\pi_2(v) = s_2$. Então:

(a) *π_1 e π_2 são lineares, e $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{Id}$;*

(b) *$\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$, $\mathrm{Im}(\pi_1) = S_1$ e $N(\pi_1) = S_2$ (e o mesmo para π_2, trocando os papéis).*

Demonstração

(a) Sejam $v = s_1 + s_2$ e $w = t_1 + t_2$. Então

$$v + \lambda w = (s_1 + \lambda t_1) + (s_2 + \lambda t_2),$$

com a primeira parcela em S_1 e a segunda em S_2. Pela unicidade, essa é *a* decomposição de $v + \lambda w$, e portanto $\pi_1(v + \lambda w) = s_1 + \lambda t_1 = \pi_1(v) + \lambda \pi_1(w)$. E $\pi_1(v) + \pi_2(v) = s_1 + s_2 = v$.

(b) Se $s \in S_1$, sua decomposição é $s = s + 0$, logo $\pi_1(s) = s$. Como $\pi_1(v) \in S_1$, isso dá $\pi_1(\pi_1(v)) = \pi_1(v)$, e também $\mathrm{Im}(\pi_1) = S_1$. Finalmente, $\pi_1(v) = 0 \iff v = 0 + s_2 \iff v \in S_2$.

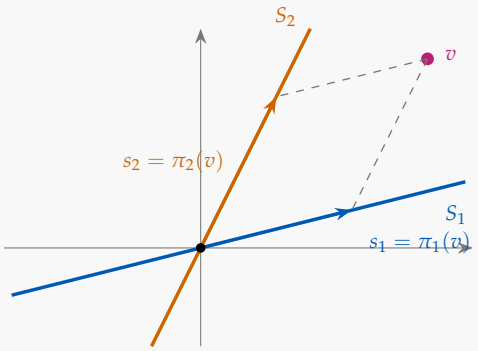
Usado em: Definição 6.26 (Projeção ortogonal), Exemplo 8.5 (Projeção: autovalores 1 e 0), Exemplo 2.35 (A projeção sobre as matrizes simétricas), Nota 2.34 (Decomposição do plano em duas retas oblíquas), Proposição 2.36 (Operadores idempotentes são projeções), Proposição 8.45 (Somas diretas invariantes e projeções), Proposição 5.53 (Todo complementar de S é isomorfo a V/S) (dem.)

Veja também: Nota 2.34 (Decomposição do plano em duas retas oblíquas)

`prop-proj`

Nota 2.34 (Decomposição do plano em duas retas oblíquas)

Requer: Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)



$\mathbb{R}^2 = S_1 \oplus S_2$ *com duas retas quaisquer (não necessariamente perpendiculares). Por v traçam-se paralelas às duas retas; os cortes dão s_1 e s_2, e só há uma maneira de fazê-lo. As componentes $\pi_1(v)$ e $\pi_2(v)$ dependem das* duas *retas: mudando S_2, muda também $\pi_1(v)$.*

A projeção π_1 é "andar paralelamente a S_2 até bater em S_1". As retas são oblíquas de propósito: decompor não é "projetar perpendicularmente"; isso só faz sentido com um produto interno (Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)). Como a componente em S_1 muda quando se muda S_2, um subespaço tem muitos complementares (Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar)).

Veja também: Exemplo 2.27 ($\mathbb{R}^2$ é soma direta de duas retas distintas), Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar)

`nota-decomposicao-em-duas-retas`

Exemplo 2.35 (A projeção sobre as matrizes simétricas)

Requer: Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta), Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)

Para $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$, a projeção sobre Sim é $T(A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$. A Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta) dá, sem conta, $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Sim}$, $\mathrm{N}(T) = \mathcal{A}$ e $T^2 = T$.

Usado em: Exemplo 7.28 (A sequência exata das matrizes simétricas e antissimétricas)

`ex-simetriz`

Proposição 2.36 (Operadores idempotentes são projeções)

Requer: Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)

Se $T : V \to V$ é linear e $T^2 = T$, então $V = \mathrm{N}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ e T é a projeção sobre $\mathrm{Im}(T)$ *ao longo de* $\mathrm{N}(T)$.

É a recíproca da Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta). Decomposições em soma direta e operadores idempotentes são, portanto, a mesma coisa.

Demonstração

A decomposição é

$$v = \underbrace{T(v)}_{\in \mathrm{Im}(T)} + \underbrace{(v - T(v))}_{\in \mathrm{N}(T)},$$

e $\mathrm{N}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$: se $v = T(u)$ e $T(v) = 0$, então $0 = T(v) = T^2(u) = T(u) = v$. O truque $v = T(v) + (v - T(v))$ reaparece muitas vezes no curso.

Usado em: Exercício 8.67 (Todo operador idempotente é diagonalizável?) (dem.)

`prop-idempotente`

Geradores, dependência linear, minimalidade e maximalidade

Definição 2.37 (Conjunto gerador)

Requer: Definição 2.17 (Subespaço gerado)

Dizemos que $v_1, \ldots, v_k \in V$ **geram** V (ou que formam um **conjunto gerador** de V) se $[v_1, \ldots, v_k] = V$, isto é, se todo vetor de V é combinação linear dos v_i. Se V admite um conjunto gerador finito, dizemos que V é **finitamente gerado**.

Usado em: Definição 2.64 (Base), Definição 2.56 (Gerador minimal e LI maximal), Exemplo 2.38 ($e_1, \ldots, e_n$ geram $\mathbb{R}^n$), Exemplo 2.39 (Geradores de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 2.40 (Três vetores que geram $\mathbb{R}^2$, com um sobrando), Exemplo 2.41 ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado), Lema 2.53 (Lema da troca), Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A), Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única)

Veja também: Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador)

`def-ger`

Exemplo 2.38 ($e_1, \ldots, e_n$ geram $\mathbb{R}^n$)

Requer: Definição 2.37 (Conjunto gerador), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

$e_1, \ldots, e_n$ geram $\mathbb{R}^n$: $(x_1, \ldots, x_n) = \sum_i x_i e_i$.

Usado em: Exemplo 2.69 (A base canônica de $\mathbb{R}^n$)

`ex-ger-a`

Exemplo 2.39 (Geradores de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 2.37 (Conjunto gerador), Exemplo 1.15 (Polinômios), Exemplo 1.14 (Matrizes $m \times n$)

$1, x, \ldots, x^n$ geram $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$; as matrizes E_{ij} geram $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Usado em: Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares)

`ex-ger-b`

Exemplo 2.40 (Três vetores que geram $\mathbb{R}^2$, com um sobrando)

Requer: Definição 2.37 (Conjunto gerador)

$(1,1), (1,-1), (2,5)$ geram $\mathbb{R}^2$ — e o terceiro vetor sobra: os dois primeiros já geram. De fato, $(2,5) = \frac{7}{2}(1,1) - \frac{3}{2}(1,-1)$. O Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado) diz que o terceiro vetor pode ser retirado sem perda.

Veja também: Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado)

`ex-ger-c`

Exemplo 2.41 ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado)

Requer: Definição 2.37 (Conjunto gerador), Exemplo 1.15 (Polinômios)

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado: se $p_1, \ldots, p_m$ o gerassem, todo polinômio teria grau $\leq \max_i \deg p_i$, e $x^{1+\max \deg p_i}$ não teria.

`ex-ger-d`

Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado)

Requer: Definição 2.17 (Subespaço gerado)

Se $u \in [v_1, \ldots, v_k]$, então $[v_1, \ldots, v_k, u] = [v_1, \ldots, v_k]$. Em palavras: acrescentar ou retirar de uma lista um vetor que é combinação linear dos demais não muda o subespaço gerado.

Demonstração

A inclusão $\supset$ é clara. Para $\subset$: se $u = \sum_i b_i v_i$, então

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + cu = (a_1 + cb_1)v_1 + \cdots + (a_k + cb_k)v_k.$$

Usado em: Motivação 2.43 (Relações lineares e vetores que sobram), Lema 2.53 (Lema da troca) (dem.), Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base) (dem.), Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo) (dem.)

`lem-sobra`

Motivação 2.43 (Relações lineares e vetores que sobram)

Requer: Exemplo 1.57 (Valores incompatíveis: não existe), Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado)

No Exemplo 1.57 (Valores incompatíveis: não existe) não existia T linear com $T(1,1) = (1,0)$ e $T(2,2) = (0,1)$ porque havia uma *relação linear* entre os vetores de partida, $(2,2) = 2(1,1)$. E o Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado) diz que um vetor que é combinação linear dos demais pode ser retirado de uma lista sem mudar o subespaço gerado. Fica a pergunta: *como saber, olhando uma lista, se algum vetor sobra?* As relações lineares viram objeto de estudo (Definição 2.44 (Independência e dependência linear)).

Veja também: Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

`mot-independencia-linear`

Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

Requer: Definição 1.29 (Combinação linear)

Uma lista $v_1, \ldots, v_k$ de vetores de V é **linearmente independente** (LI) se a única combinação linear nula deles é a trivial:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_k = 0.$$

Caso contrário, a lista é **linearmente dependente** (LD): existe uma combinação nula com algum coeficiente não nulo. A lista vazia é, por convenção, LI.
Não se trata de ver que a combinação trivial é nula (ela sempre é), e sim que *só* ela é. Como na Nota 2.26 (Basta testar a unicidade no zero), é um enunciado de *unicidade no zero*: a Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única) torna isso explícito.

Usado em: Definição 2.64 (Base), Definição 2.56 (Gerador minimal e LI maximal), Exemplo 2.51 (Em $\mathbb{R}^n$, testar independência é resolver um sistema homogêneo), Exemplo 2.59 ($1, \cos t, \operatorname{sen} t$ são LI), Exemplo 2.60 (e^t, e^{2t} são LI), Exemplo 2.61 ($1, \cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t$ são LD), Exemplo 2.48 ($e_1, \ldots, e_n$ são LI em $\mathbb{R}^n$), Exemplo 2.49 ($1, x, \ldots, x^n$ são LI em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 2.50 (Uma lista "triangular" de polinômios é LI), Exercício 3.44 (Vetores dois a dois LI formam uma lista LI?), Lema 2.53 (Lema da troca), Proposição 7.9 (Propriedades das formas alternadas), Proposição 6.32 (Determinante de Gram), Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais), Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única),

Proposição 6.14 (Vetores ortogonais não nulos são LI), Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas), Teorema 6.9 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz), Teorema 6.17 (Gram–Schmidt), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível), Teorema 8.15 (Autovetores de autovalores distintos são LI)

Veja também: Motivação 2.43 (Relações lineares e vetores que sobram), Nota 2.26 (Basta testar a unicidade no zero), Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única)

`def-li`

Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Definição 2.37 (Conjunto gerador), Definição 1.36 (Transformação linear)

A demonstração exige: Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$), Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

A lista $v_1, \ldots, v_k$ é LI se e somente se todo vetor de $[v_1, \ldots, v_k]$ se escreve de uma única maneira como combinação linear dos v_i. Equivalentemente: a transformação linear

$$T : \mathbb{R}^k \to V, \qquad T(a_1, \ldots, a_k) = a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$$

é injetora. (Ela é sobrejetora se e somente se os v_i geram V.)

Demonstração

T é linear (é a transformação da Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$)), e a lista é LI exatamente quando $\mathrm{N}(T) = \{0\}$, isto é, quando T é injetora (Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)). A imagem de T é $[v_1, \ldots, v_k]$.

`prop-li-equivale-escrita-unica`

Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Definição 2.17 (Subespaço gerado)

Seja $k \geq 2$.

(a) *$v_1, \ldots, v_k$ são LD se e somente se algum v_j é combinação linear dos demais.*

(b) *Se $v_1, \ldots, v_k$ são LI e $v_1, \ldots, v_k, u$ são LD, então $u \in [v_1, \ldots, v_k]$.*

O item (b) é o que vai ser usado, e vale dizer por quê com uma frase: *se a lista era LI e deixou de ser quando u entrou, a culpa é de u*. Esse raciocínio aparece no Teorema 2.79 (Teorema do completamento) e na demonstração de que LI maximal gera (Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo)).

Demonstração

(a) Se $\sum_i a_i v_i = 0$ com $a_j \neq 0$, isolamos $v_j = -\sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} v_i$. Reciprocamente, se $v_j = \sum_{i \neq j} b_i v_i$, então $\sum_{i \neq j} b_i v_i - 1 \cdot v_j = 0$ é uma combinação nula com o coeficiente $-1 \neq 0$.

(b) Existe $\sum_i a_i v_i + cu = 0$ com coeficientes não todos nulos. Se fosse $c = 0$, sobraria $\sum_i a_i v_i = 0$ com algum $a_i \neq 0$, contra a independência dos v_i. Logo $c \neq 0$ e $u = -\sum_i \frac{a_i}{c} v_i$.

Usado em: Nota 2.47 (Independência linear em casos pequenos), Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas) (dem.), Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base) (dem.), Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo) (dem.)

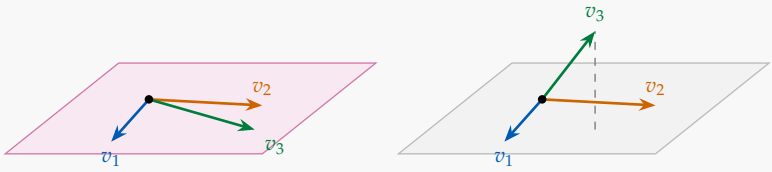
Veja também: Teorema 2.79 (Teorema do completamento), Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo)

prop-ld

Nota 2.47 (Independência linear em casos pequenos)

Requer: Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais), Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$)

Casos pequenos. Um vetor sozinho é LI se e somente se é não nulo (pelo Corolário 1.8 (Se $\lambda v = 0$, então $\lambda = 0$ ou $v = 0$), $\lambda v = 0$ com $\lambda \neq 0$ força $v = 0$). Dois vetores são LD se e somente se um é múltiplo do outro. Três vetores de $\mathbb{R}^3$ são LD se e somente se estão num mesmo plano pela origem. Toda lista que contenha o vetor nulo, ou um vetor repetido, é LD.



LD: $v_3 \in [v_1, v_2]$ LI: $v_3 \notin [v_1, v_2]$

Três vetores de $\mathbb{R}^3$, com v_1, v_2 LI. À esquerda v_3 está no plano $[v_1, v_2]$, e a lista é LD. À direita v_3 sai do plano, e a lista é LI. A Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais)(b) é esta figura: a única maneira de estragar a independência acrescentando um vetor é acrescentá-lo dentro do subespaço já gerado.

nota-geom

Exemplo 2.48 ($e_1, \ldots, e_n$ são LI em $\mathbb{R}^n$)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

$e_1, \ldots, e_n$ são LI em $\mathbb{R}^n$: $\sum_i a_i e_i = (a_1, \ldots, a_n)$.

Usado em: Exemplo 2.69 (A base canônica de $\mathbb{R}^n$)

ex-li-a

Exemplo 2.49 ($1, x, \ldots, x^n$ são LI em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Exemplo 1.15 (Polinômios)

$1, x, \ldots, x^n$ são LI em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$: um polinômio é nulo exatamente quando todos os coeficientes o são.

Usado em: Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$)

ex-li-b

Exemplo 2.50 (Uma lista "triangular" de polinômios é LI)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Exemplo 1.15 (Polinômios)

$1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$ são LI em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. De $a + b(1+x) + c(1+x+x^2) = 0$ vem, ol-

hando o coeficiente de x^2, $c = 0$; depois o de x, $b = 0$; depois $a = 0$. A lista é "triangular", e se resolve de trás para diante.

ex-li-c

Exemplo 2.51 (Em $\mathbb{R}^n$, testar independência é resolver um sistema homogêneo)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

Em $\mathbb{R}^n$, testar independência é resolver um sistema homogêneo. Sejam $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (2,1,-2)$, $v_3 = (3,1,1)$, $v_4 = (4,-1,-2)$. A equação $xv_1 + yv_2 + zv_3 + wv_4 = 0$ é, coordenada a coordenada,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 2x + y + z - w = 0 \\ 3x - 2y + z - 2w = 0, \end{cases}$$

isto é, o sistema cujas *colunas* são os vetores. Ele tem a solução não trivial $(x,y,z,w) = (11,1,-15,8)$, e portanto

$$11v_1 + v_2 - 15v_3 + 8v_4 = 0.$$

Havia chance de o sistema só ter a solução nula? São 3 equações e 4 incógnitas. Com mais incógnitas do que equações, sempre há solução não trivial (Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações)) — e isso é o lema da troca (Lema 2.53 (Lema da troca)).

Veja também: Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações), Lema 2.53 (Lema da troca)

ex-em-testar-independencia-e-resolver-um-sistema

Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações)

Um sistema linear homogêneo com m equações e $k > m$ incógnitas tem solução não trivial.
A demonstração é o escalonamento (Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida)) em miniatura.

Demonstração

Indução em m. Considere o sistema

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k = 0, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Se todos os coeficientes a_{i1} de x_1 são nulos, $x = (1,0,\ldots,0)$ é solução não trivial. Senão, reordenando as equações, $a_{11} \neq 0$. Para $i \geq 2$, subtraia da equação i a primeira multiplicada por a_{i1}/a_{11}: obtêm-se $m-1$ equações em que x_1 não aparece, nas $k-1$ incógnitas $x_2, \ldots, x_k$.

- Se $m = 1$, não sobra equação nenhuma: escolha $x_2 = 1$, $x_3 = \cdots = x_k = 0$ (há x_2, porque $k \geq 2$).
- Se $m \geq 2$, como $k - 1 > m - 1$, a hipótese de indução dá $(x_2, \ldots, x_k) \neq 0$ resolvendo as $m-1$ equações novas.

Em ambos os casos, defina $x_1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k)$, que resolve a primeira equação. As equações originais $i \geq 2$ são as novas somadas com um múltiplo da primeira, e portanto também se anulam. A solução $(x_1, \ldots, x_k)$ é não trivial porque $(x_2, \ldots, x_k) \neq 0$.

Usado em: Lema 2.53 (Lema da troca) (dem.)

Veja também: Corolário 3.25 (Mais incógnitas do que equações: há solução não trivial), Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida)

`lem-sist`

Lema 2.53 (Lema da troca)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Definição 2.37 (Conjunto gerador)

A demonstração exige: Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações), Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado)

Se $V = [u_1, \dots, u_m]$ e $v_1, \dots, v_k \in V$ são LI, então $k \leq m$.
Em palavras: *mais vetores do que geradores significa mais incógnitas do que equações.*

Demonstração

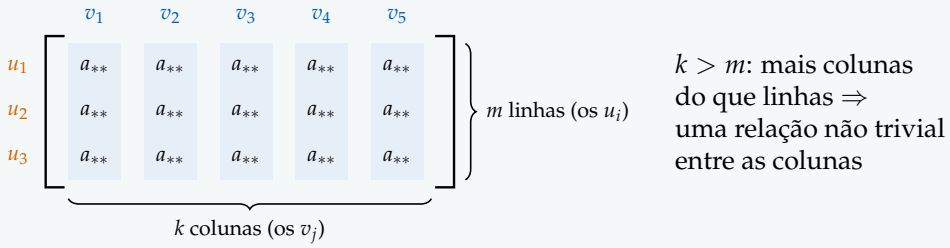
Suponha, por absurdo, $k > m$. Cada v_j é combinação dos u_i:

$$v_j = a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{mj}u_m, \qquad j = 1, \dots, k.$$

Para escalares $c_1, \dots, c_k$,

$$\sum_{j=1}^{k} c_j v_j = \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}c_j \Big) u_i.$$

O sistema $\sum_j a_{ij}c_j = 0$ ($i = 1, \dots, m$) tem m equações e $k > m$ incógnitas; pelo Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações), tem solução $(c_1, \dots, c_k) \neq 0$. Para ela, todos os coeficientes dos u_i se anulam, e portanto $\sum_j c_j v_j = 0$ com algum $c_j \neq 0$ — os v_j seriam LD. Absurdo.



A demonstração do lema da troca em uma matriz. A coluna j traz as coordenadas de v_j em relação a $u_1, \dots, u_m$. Com mais colunas do que linhas, o Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações) dá uma combinação não trivial das colunas que se anula; a mesma combinação dos v_j se anula.

Outra demonstração: substituição sucessiva (Steinitz). Esta demonstração não usa sistemas lineares, e explica o nome do lema: os v entram na lista geradora um de cada vez, cada um expulsando um u.

Afirmação. Para cada $r \leq \min(k, m)$, após renumerar os u_i,

$$[v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_m] = V.$$

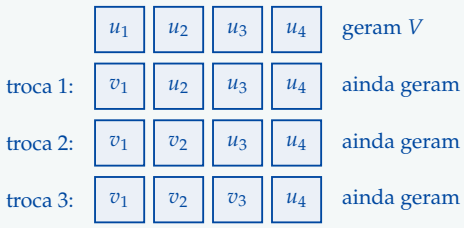
Passo. Suponha a afirmação para $r - 1$ (para $r = 0$ é a hipótese). Então

$$v_r = b_1 v_1 + \cdots + b_{r-1}v_{r-1} + c_r u_r + \cdots + c_m u_m.$$

Algum c_i é não nulo: se todos fossem nulos, v_r seria combinação de $v_1, \dots, v_{r-1}$, e os v seriam LD. Renumerando, $c_r \neq 0$; isolando u_r, ele é combinação de $v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_m$, e pelo Lema 2.42

(Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado) trocar u_r por v_r não altera o subespaço gerado, que continua sendo V.

Conclusão. Se fosse $k > m$, com $r = m$ teríamos $[v_1, \ldots, v_m] = V$, e então $v_{m+1} \in [v_1, \ldots, v_m]$, contra a independência.



A substituição de Steinitz. Em cada linha um v entra e um u sai, e a lista continua gerando V. Se houvesse mais v do que u, os u acabariam antes, e o v seguinte já estaria no espaço gerado pelos anteriores.

Usado em: Corolário 2.54 (Mais vetores do que geradores: a lista é LD), Corolário 8.16 (No máximo n autovalores; a soma dos autoespaços é direta) (dem.), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base) (dem.), Teorema 2.79 (Teorema do completamento) (dem.), Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos) (dem.)

`lem-troca`

Corolário 2.54 (Mais vetores do que geradores: a lista é LD)

Requer: Lema 2.53 (Lema da troca)

Se V é gerado por m vetores, quaisquer $m+1$ vetores de V são LD. Em particular, quaisquer $n+1$ vetores de $\mathbb{R}^n$ são LD, e quaisquer $n+2$ polinômios de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ são LD.

Usado em: Exemplo 2.62 ($1, t, t^2, \ldots$: uma família infinita LI), Exemplo 2.55 (Quatro vetores num espaço gerado por três)

`cor-ld`

Exemplo 2.55 (Quatro vetores num espaço gerado por três)

Requer: Corolário 2.54 (Mais vetores do que geradores: a lista é LD)

Se (e_1, e_2, e_3) gera V e $v \in V$, a lista $(v,\ v - e_1,\ v - e_2,\ v - e_3)$ tem quatro vetores num espaço gerado por três, e é LD — sem conta. Ela gera V, porque $e_i = v - (v - e_i)$.

`ex-q12`

Definição 2.56 (Gerador minimal e LI maximal)

Requer: Definição 2.37 (Conjunto gerador), Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

Seja $B = (v_1, \ldots, v_k)$ uma lista de vetores de V.

(a) B é um **gerador minimal** de V se gera V e nenhuma lista obtida de B retirando um vetor gera V.

(b) B é **LI maximal** em V se é LI e, para todo $u \in V$, a lista $(v_1, \ldots, v_k, u)$ é LD.

Usado em: Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo)

`def-minmax`

Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo)

Requer: Definição 2.56 (Gerador minimal e LI maximal)

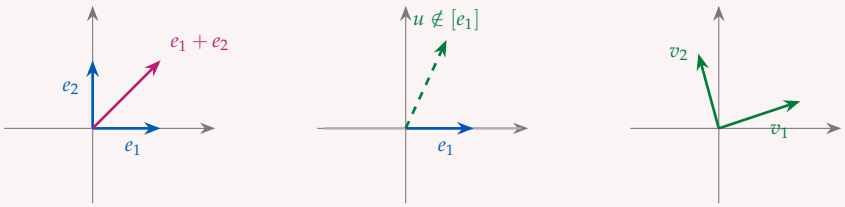
A demonstração exige: Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais), Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado)

Para uma lista finita $B = (v_1, \ldots, v_k)$ de vetores de V, são equivalentes:

(a) *B é um gerador minimal de V;*

(b) *B gera V e é LI;*

(c) *B é LI maximal em V.*



gera, LD
não minimal

LI, não gera
não maximal

gera e LI
minimal e maximal

Os três casos em $\mathbb{R}^2$. À esquerda sobra um vetor (qualquer um dos três); no meio falta um vetor (qualquer um fora da reta); à direita não sobra nem falta. O teorema diz que "não sobra" e "não falta" acontecem juntos.

Uma lista com essas três propriedades se chama *base* (Definição 2.64 (Base)).

Demonstração

(a)⇒(b). Se B fosse LD, algum v_j seria combinação dos demais (Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais)(a)), e retirá-lo não mudaria o subespaço gerado (Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado)): a lista menor ainda geraria V, contra a minimalidade.

(b)⇒(a). Se, retirando v_j, a lista ainda gerasse V, então v_j seria combinação dos demais, e B seria LD.

(b)⇒(c). Todo $u \in V = [B]$ é combinação dos v_i, e então a lista $(v_1, \ldots, v_k, u)$ é LD pela Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais)(a).

(c)⇒(b). Dado $u \in V$, a lista $(v_1, \ldots, v_k, u)$ é LD e B é LI; pela Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais)(b), $u \in [B]$. Logo B gera V.

Usado em: Nota 2.58 (O que o teorema do gerador minimal não diz)

Veja também: Definição 2.64 (Base)

`thm-minmax`

Nota 2.58 (O que o teorema do gerador minimal não diz)

Requer: Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo)

O que o teorema não diz. O Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo) não diz que todo gerador LI tem o mesmo número de elementos, nem que existe um gerador finito. Com o lema da troca, a primeira afirmação sai em duas linhas; a segunda depende de V ser finitamente gerado. São a Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos) e a Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base).

Veja também: Lema 2.53 (Lema da troca), Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos), Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base)

nota-minmax

Exemplo 2.59 ($1, \cos t, \operatorname{sen} t$ são LI)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Nota 1.34 (Igualdade de funções, ponto a ponto)

$1, \cos t, \operatorname{sen} t$ são LI. De $a + b\cos t + c\operatorname{sen} t = 0$ para todo t: em $t = 0$, $a + b = 0$; em $t = \pi$, $a - b = 0$; logo $a = b = 0$, e em $t = \pi/2$ vem $c = 0$.

Usado em: Nota 2.63 (Pontos provam independência, não dependência)

ex-func-a

Exemplo 2.60 (e^t, e^{2t} são LI)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Nota 1.34 (Igualdade de funções, ponto a ponto)

e^t, e^{2t} são LI. De $ae^t + be^{2t} = 0$: em $t = 0$, $a + b = 0$; em $t = \ln 2$, $2a + 4b = 0$; logo $a = b = 0$.

ex-func-b

Exemplo 2.61 ($1, \cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t$ são LD)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

$1, \cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t$ são LD: $1 - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 0$. E $1, \cos^2 t, \cos 2t$ também: $1 - 2\cos^2 t + \cos 2t = 0$.

ex-func-c

Exemplo 2.62 ($1, t, t^2, \ldots$: uma família infinita LI)

Requer: Corolário 2.54 (Mais vetores do que geradores: a lista é LD), Exemplo 1.19 (Funções de um conjunto em $\mathbb{R}$)

$1, t, t^2, t^3, \ldots$ é uma família infinita LI em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: toda sub-lista finita é LI (um polinômio que se anula em todo t tem todos os coeficientes nulos). Pelo Corolário 2.54 (Mais vetores do que geradores: a lista é LD), $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

ex-func-d

Nota 2.63 (Pontos provam independência, não dependência)

Requer: Exemplo 2.59 ($1, \cos t, \operatorname{sen} t$ são LI)

Em $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a igualdade $\sum_i a_i f_i = 0$ vale em *cada* t, e escolher pontos transforma a pergunta num sistema linear nos a_i (Nota 1.34 (Igualdade de funções, ponto a ponto)). Atenção à lógica: pontos bem escolhidos *provam* independência (se o sistema nos pontos só tem a solução nula, acabou), mas pontos mal escolhidos não provam dependência. No Exemplo 2.59 ($1, \cos t, \operatorname{sen} t$ são LI), só com $t = 0$ e $t = 2\pi$ teríamos duas vezes a mesma equação.

nota-pontos-provam-independencia

Bases, dimensão, teorema do completamento, teorema do núcleo e da imagem

Definição 2.64 (Base)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Definição 2.37 (Conjunto gerador)

Uma **base** de um espaço vetorial V é uma sequência $B = (v_1, \ldots, v_n)$ de vetores de V que é *linearmente independente* e *gera* V.
Uma base é uma *sequência*, não um conjunto: a ordem importa, porque é ela que dá sentido às coordenadas (Definição 2.66 (Coordenadas numa base)).

Usado em: Definição 5.8 (Base dual), Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares), Exercício 3.45 (Toda base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ contém uma matriz invertível?), Proposição 2.65 (Base equivale a escrita única), Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base), Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos)

Veja também: Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo)

`def-base`

Proposição 2.65 (Base equivale a escrita única)

Requer: Definição 2.64 (Base)

$B = (v_1, \ldots, v_n)$ *é base de* V *se e somente se todo* $v \in V$ *se escreve de* uma única *maneira como*

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

($\Rightarrow$) A existência da escrita é o fato de B gerar V. Para a unicidade, suponha

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

Passando tudo para um lado, $(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0$; como B é LI, todos os coeficientes são nulos, isto é, $a_i = b_i$ para todo i.

($\Leftarrow$) A existência da escrita diz que B gera V. Para a independência, note que o vetor 0 admite a escrita $0 = 0\,v_1 + \cdots + 0\,v_n$; pela unicidade, essa é a *única*, e portanto $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ força $a_i = 0$ para todo i.

Usado em: Definição 2.66 (Coordenadas numa base)

Veja também: Proposição 2.45 (LI equivale a escrita única)

`prop-unica`

Definição 2.66 (Coordenadas numa base)

Requer: Proposição 2.65 (Base equivale a escrita única)

Seja $B = (v_1, \ldots, v_n)$ base de V. Dado $v \in V$, os *únicos* $a_1, \ldots, a_n$ com $v = \sum_i a_i v_i$ são as **coordenadas de** v **na base** B, e escrevemos

$$[v]_B = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Usado em: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Exemplo 2.69 (A base canônica de $\mathbb{R}^n$), Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 2.72 (Coordenadas numa base não canônica de $\mathbb{R}^2$), Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal), Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$), Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)

def-coord

Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)

Requer: Definição 2.66 (Coordenadas numa base), Definição 1.66 (Isomorfismo)

Se B é base de V com n elementos, então

$$\varphi_B : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad \varphi_B(v) = [v]_B$$

é um isomorfismo.

Demonstração

Boa definição: é exatamente a unicidade da Proposição 2.65 (Base equivale a escrita única).
Linearidade: se $v = \sum_i a_i v_i$ e $w = \sum_i b_i v_i$, então

$$v + \lambda w = \sum_i (a_i + \lambda b_i) v_i,$$

e, de novo pela unicidade, essa é *a* escrita de $v + \lambda w$. Logo $[v + \lambda w]_B = [v]_B + \lambda [w]_B$.
Sobrejetividade: dado $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, o vetor $v = \sum_i a_i v_i$ satisfaz $[v]_B = (a_1, \ldots, a_n)$.
Injetividade: se $[v]_B = 0$, então $v = \sum_i 0\, v_i = 0$.

Usado em: Motivação 3.1 (Por que uma transformação linear tem matriz), Nota 2.68 (Escolher uma base é escolher um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$), Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão) (dem.), Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$) (dem.), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$) (dem.)

prop-iso

Nota 2.68 (Escolher uma base é escolher um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)

Requer: Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)

A Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$) em uma frase: **escolher uma base de V é escolher um isomorfismo entre V e $\mathbb{R}^n$.** Muito do que se faz com bases é o transporte, por esse isomorfismo, de fatos que já conhecemos em $\mathbb{R}^n$.

Note também que o isomorfismo *depende da base*: bases diferentes dão isomorfismos diferentes. Em particular, não existe "a" base de um espaço vetorial abstrato — só $\mathbb{R}^n$ tem base canônica, e é justamente porque em $\mathbb{R}^n$ já veio escolhido um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$, a saber, a identidade.

Por isso não faz sentido perguntar qual é a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, embora $(1, x, x^2)$ seja a escolha óbvia.

nota-base-e-escolha-de-isomorfismo

Exemplo 2.69 (A base canônica de $\mathbb{R}^n$)

Requer: Definição 2.66 (Coordenadas numa base), Exemplo 2.38 ($e_1, \ldots, e_n$ geram $\mathbb{R}^n$), Exemplo 2.48 ($e_1, \ldots, e_n$ são LI em $\mathbb{R}^n$)

$\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ é base de $\mathbb{R}^n$, a *base canônica*. Nela, $[v]_{\mathcal{E}} = v$.

Usado em: Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

ex-bases-a

Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 2.66 (Coordenadas numa base), Exemplo 2.39 (Geradores de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 2.49 ($1, x, \ldots, x^n$ são LI em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$)

$(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ é base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$: as coordenadas de um polinômio são os seus coeficientes.

Usado em: Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 3.4 (A matriz da derivada em duas bases), Exemplo 3.6 (Matriz de uma transformação $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$), Exercício 3.47 (Existe $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?) (dem.)

`ex-bases-b`

Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares)

Requer: Definição 2.64 (Base), Exemplo 2.39 (Geradores de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

As matrizes elementares E_{ij}, ordenadas linha a linha, formam uma base de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

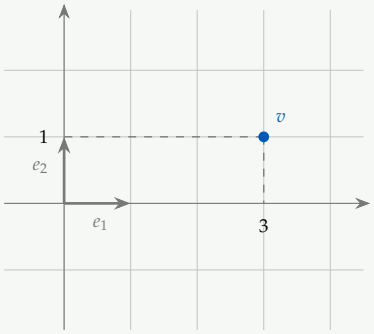
Usado em: Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 4.31 (O determinante da multiplicação à esquerda), Exemplo 3.6 (Matriz de uma transformação $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$), Exemplo 4.30 (O determinante da transposição), Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos), Exercício 3.45 (Toda base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ contém uma matriz invertível?) (dem.)

`ex-bases-c`

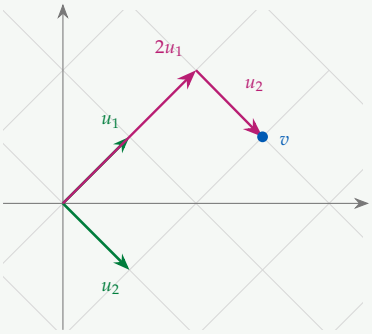
Exemplo 2.72 (Coordenadas numa base não canônica de $\mathbb{R}^2$)

Requer: Definição 2.66 (Coordenadas numa base)

$B = \big((1,1),(1,-1)\big)$ é base de $\mathbb{R}^2$, e $[(3,1)]_B = (2,1)$, porque $(3,1) = 2(1,1) + 1(1,-1)$. "Coordenadas" e "entradas" são coisas diferentes.



$[v]_{\mathcal{E}} = (3,1)$



$[v]_B = (2,1)$

O mesmo vetor v, duas bases, duas listas de coordenadas. Escolher a base é escolher a malha em que se conta; a Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$) diz que cada malha dá um isomorfismo $V \to \mathbb{R}^n$, e que malhas diferentes dão isomorfismos diferentes.

Veja também: Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)

`ex-bases-d`

Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base)

Requer: Definição 2.64 (Base)

A demonstração exige: Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais), Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado)

Todo espaço vetorial $V \neq \{0\}$ gerado por um conjunto finito possui base. Mais precisamente: de todo conjunto gerador finito pode-se extrair uma base.
A demonstração é um *algoritmo*: ela não só garante a existência como diz como achar a base. Isso é usado toda vez que um subespaço vem dado por geradores.

Demonstração

Seja $G = \{u_1, \ldots, u_m\}$ com $[G] = V$. Se G é LI, ele já é base e acabou. Se não é, pela Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais) algum u_j é combinação linear dos demais; e, pelo Lema 2.42 (Um vetor que é combinação dos demais pode ser retirado), retirar de um gerador um vetor que é combinação dos outros não altera o subespaço gerado, logo $G \setminus \{u_j\}$ ainda gera V.

Repetimos o procedimento. Ele termina, porque a cada passo o conjunto perde um elemento e começamos com um número finito deles. E ele não pode chegar ao conjunto vazio, porque $[\varnothing] = \{0\} \neq V$. O conjunto que sobra gera V e é LI: é base.

Usado em: Nota 2.80 (LI de um lado, geradores do outro, base no meio), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base) (dem.)

`thm-existencia-de-base`

Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos)

Requer: Definição 2.64 (Base)

A demonstração exige: Lema 2.53 (Lema da troca)

Se V admite uma base com n elementos e uma base com m elementos, então $n = m$.

Demonstração

Sejam $B = (v_1, \ldots, v_n)$ e $C = (w_1, \ldots, w_m)$ bases de V. Aplique o Lema 2.53 (Lema da troca) duas vezes:

- B gera V e C é LI $\implies m \leq n$;
- C gera V e B é LI $\implies n \leq m$.

Logo $n = m$.

Usado em: Definição 2.75 (Dimensão)

`thm-invar`

Definição 2.75 (Dimensão)

Requer: Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos)

Se V admite uma base com n elementos, dizemos que V tem **dimensão finita** e escrevemos $\dim V = n$. Convencionamos $\dim\{0\} = 0$ (base vazia). Um espaço que não é gerado por nenhum conjunto finito tem **dimensão infinita**.
É a Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos) que dá sentido à palavra "dimensão": sem ela, a definição seria ambígua.

Usado em: Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar), Corolário 2.94 (Dimensões diferentes: T não é injetora, ou não é sobrejetora), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal), Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão), Corolário 8.16 (No máximo n autovalores; a soma dos autoespaços é direta), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base), Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente), Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço), Definição 3.23 (Posto de uma matriz), Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 2.77 (Dimensão das matrizes simétricas e das antissimétricas), Exemplo 2.78 ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tem dimensão infinita), Proposição 7.24 (Sequên-

cias exatas curtas), Proposição 5.25 (Dimensão do anulador), Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo), Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa), Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo), Teorema 2.79 (Teorema do completamento), Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^{\perp}$), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno), Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços), Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

def-dim

Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Exemplo 2.69 (A base canônica de $\mathbb{R}^n$), Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares)

$$\dim \mathbb{R}^n = n; \quad \dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n+1; \quad \dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn.$$

Usado em: Exemplo 2.97 (Dimensão das matrizes de traço nulo), Exemplo 2.99 (Uma dimensão difícil de calcular na mão), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$) (dem.)

ex-dims-a

Exemplo 2.77 (Dimensão das matrizes simétricas e das antissimétricas)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Exemplo 2.7 (Matrizes simétricas e antissimétricas)

$\mathrm{Sim} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^t = A\}$ e $\mathcal{A} = \{A : A^t = -A\}$. Uma matriz simétrica fica determinada pela diagonal e pela parte estritamente triangular superior:

$$\dim \mathrm{Sim} = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Uma antissimétrica tem diagonal nula e fica determinada pela parte estritamente triangular superior: $\dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$. Note que $\dim \mathrm{Sim} + \dim \mathcal{A} = n^2 = \dim \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ — coerente com $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$ (Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)), que o Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam) explica.
Uma base de Sim: as matrizes E_{ii} e $E_{ij} + E_{ji}$ com $i < j$.

Usado em: Exemplo 6.24 (Matrizes simétricas e antissimétricas são ortogonais), Exemplo 2.88 (As dimensões confirmam $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Exemplo 8.19 (Os autoespaços da transposição)

Veja também: Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam)

ex-dims-b

Exemplo 2.78 ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tem dimensão infinita)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão)

$\mathcal{P}(\mathbb{R})$, o espaço de *todos* os polinômios, tem dimensão infinita: se fosse gerado por $p_1, \ldots, p_m$, todo polinômio teria grau $\leq \max_i \deg p_i$, o que é falso.

Veja também: Exemplo 2.41 ($\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado)

ex-dims-c

Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Lema 2.53 (Lema da troca)

Seja $\dim V = n$ *e sejam* $v_1, \ldots, v_k \in V$ *linearmente independentes. Então existem* $v_{k+1}, \ldots, v_n \in V$ *tais que* $(v_1, \ldots, v_n)$ *é base de* V.

Demonstração

Se $[v_1, \ldots, v_k] = V$, então $(v_1, \ldots, v_k)$ é base, e pelo Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos) temos $k = n$: nada há a acrescentar.

Caso contrário, existe $v_{k+1} \in V$ com $v_{k+1} \notin [v_1, \ldots, v_k]$. Afirmamos que $v_1, \ldots, v_{k+1}$ são LI. De fato, suponha

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} = 0.$$

Se $a_{k+1} \neq 0$, poderíamos isolar $v_{k+1} = -a_{k+1}^{-1}(a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k) \in [v_1, \ldots, v_k]$, contra a escolha de v_{k+1}. Logo $a_{k+1} = 0$, e a igualdade vira $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$, cujos coeficientes são nulos porque $v_1, \ldots, v_k$ são LI.

Repetimos o argumento. O processo termina: pelo Lema 2.53 (Lema da troca), um conjunto LI em V nunca tem mais do que n elementos, já que V é gerado por n vetores. Quando ele para, é porque o conjunto obtido gera V; sendo também LI, é base — e pelo Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos) ela tem exatamente n elementos.

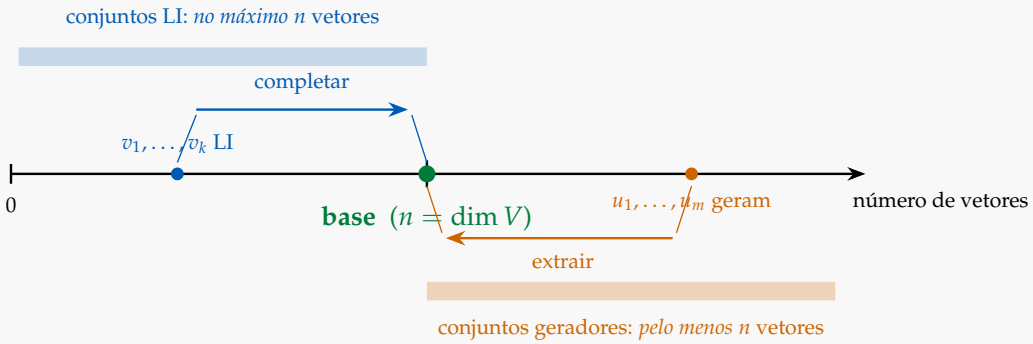
Usado em: Exemplo 2.84 (Completar dois vetores a uma base de $\mathbb{R}^3$), Nota 2.80 (LI de um lado, geradores do outro, base no meio), Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar) (dem.), Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal) (dem.), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base) (dem.), Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço) (dem.), Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos) (dem.), Proposição 5.25 (Dimensão do anulador) (dem.), Proposição 8.27 ($1 \leq \mathrm{mg} \leq \mathrm{ma}$) (dem.), Proposição 7.11 (O produto exterior é alternado e detecta dependência linear) (dem.), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem) (dem.), Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços) (dem.)

Veja também: Nota 2.80 (LI de um lado, geradores do outro, base no meio)

`thm-compl`

Nota 2.80 (LI de um lado, geradores do outro, base no meio)

Requer: Teorema 2.79 (Teorema do completamento), Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base)



A régua que organiza a Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base) e o Teorema 2.79 (Teorema do completamento). Conjuntos LI vivem à esquerda de n, geradores vivem à direita, e uma base é o único ponto de encontro. Os dois teoremas são as duas setas: uma empurra um LI para a direita, a outra puxa um gerador para a esquerda. Um *extrai* base de um gerador, o outro *completa* base a partir de um LI: são os dois lados da equivalência do Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo), agora em forma de teorema. O Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base) é ler a figura no ponto n.

Veja também: Teorema 2.57 (Gerador minimal, gerador LI e LI maximal são o mesmo), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)

`nota-regua-li-e-geradores`

Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Lema 2.53 (Lema da troca), Teorema 2.79 (Teorema do completamento), Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base)

Seja $\dim V = n$. *Então:*

(a) *quaisquer* $n+1$ *vetores de* V *são LD;*

(b) n *vetores LI de* V *formam uma base;*

(c) n *vetores que geram* V *formam uma base.*

O corolário reduz o trabalho pela metade: sabendo a dimensão, basta verificar *uma* das duas propriedades.

Demonstração

(a) V é gerado por n vetores (uma base), então pelo Lema 2.53 (Lema da troca) nenhum conjunto LI tem mais de n elementos.

(b) Pelo Teorema 2.79 (Teorema do completamento), esses n vetores se completam a uma base; mas toda base tem n elementos (Teorema 2.74 (Todas as bases têm o mesmo número de elementos)), logo nada foi acrescentado — eles já eram base.

(c) Pelo Teorema 2.73 (De todo gerador finito extrai-se uma base), deles se extrai uma base; mas toda base tem n elementos, logo nada foi retirado.

Usado em: Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo), Nota 3.40 (O teorema do núcleo e da imagem em quatro roupas), Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço) (dem.), Proposição 7.9 (Propriedades das formas alternadas) (dem.), Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações) (dem.), Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas) (dem.)

Veja também: Nota 2.80 (LI de um lado, geradores do outro, base no meio)

`cor-npontos`

Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base), Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

Seja $\dim V = n$ e $S \subset V$ um subespaço. Então S tem dimensão finita, $\dim S \leq n$, e vale $\dim S = n$ se e somente se $S = V$.

Demonstração

Todo conjunto LI contido em S é, em particular, LI em V, logo tem no máximo n elementos pelo Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)(a). Escolha então em S um conjunto LI $(u_1, \ldots, u_k)$ com k *máximo* (possível, porque $k \leq n$). Ele gera S: se existisse $u \in S$ fora de $[u_1, \ldots, u_k]$, o conjunto $(u_1, \ldots, u_k, u)$ seria LI — pelo mesmo argumento da demonstração do Teorema 2.79 (Teorema do completamento) — contrariando a maximalidade de k. Logo $(u_1, \ldots, u_k)$ é base de S e $\dim S = k \leq n$.

Se $k = n$, então $(u_1, \ldots, u_n)$ são n vetores LI em V, logo base de V pelo Corolário 2.81 (Em

dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)(b); portanto $V = [u_1, \ldots, u_n] \subset S$, isto é, $S = V$. A recíproca é imediata.

Usado em: Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração), Corolário 5.26 (Todo hiperplano é o núcleo de um funcional) (dem.), Teorema 8.23 (Critério de diagonalização) (dem.), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem) (dem.)

`cor-sub`

Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 2.24 (Soma direta)

A demonstração exige: Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

Todo subespaço S de um espaço V de dimensão finita admite complementar: existe $S' \subset V$ com $V = S \oplus S'$.

Demonstração

Tome uma base $(u_1, \ldots, u_k)$ de S e complete-a a uma base $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_r)$ de V (Teorema 2.79 (Teorema do completamento)). Ponha $S' = [w_1, \ldots, w_r]$. Então $S + S' = V$, porque a base toda está em $S \cup S'$. E $S \cap S' = \{0\}$: se $v \in S \cap S'$, escrevemos $v = \sum_i a_i u_i$ e $v = \sum_j b_j w_j$, donde $\sum_i a_i u_i - \sum_j b_j w_j = 0$; como a base toda é LI, todos os coeficientes são nulos e $v = 0$.

Usado em: Exemplo 2.84 (Completar dois vetores a uma base de $\mathbb{R}^3$), Motivação 6.1 (A estrutura que faltava para escolher)

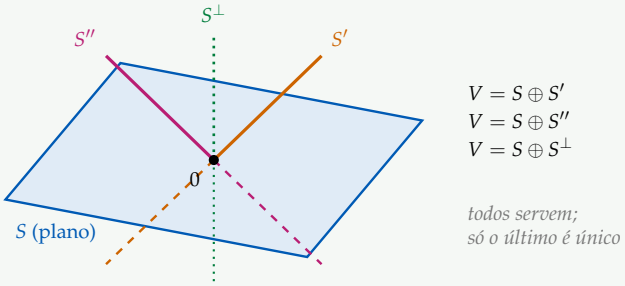
Veja também: Nota 2.34 (Decomposição do plano em duas retas oblíquas)

`cor-complementar`

Exemplo 2.84 (Completar dois vetores a uma base de $\mathbb{R}^3$)

Requer: Teorema 2.79 (Teorema do completamento), Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar)

Completar $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1)$ a uma base de $\mathbb{R}^3$. Eles são LI. Basta achar um vetor fora do plano $[v_1, v_2]$: como $[v_1, v_2] = \{(x,y,z) : x - y + z = 0\}$, o vetor $e_1 = (1,0,0)$ serve, pois $1 \neq 0$. Logo $\big((1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\big)$ é base de $\mathbb{R}^3$, e $S' = [(1,0,0)]$ é um complementar do plano.



Um subespaço tem muitos complementares. Qualquer reta fora do plano serve, e o Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar) produz uma delas — a que sair do completamento de base. O complemento ortogonal *$S^\perp$ (pontilhado) é apenas um entre eles, e é único; mas ele exige um produto interno (Definição 6.21 (Complemento ortogonal)).*

Veja também: Definição 6.21 (Complemento ortogonal)

`ex-completar`

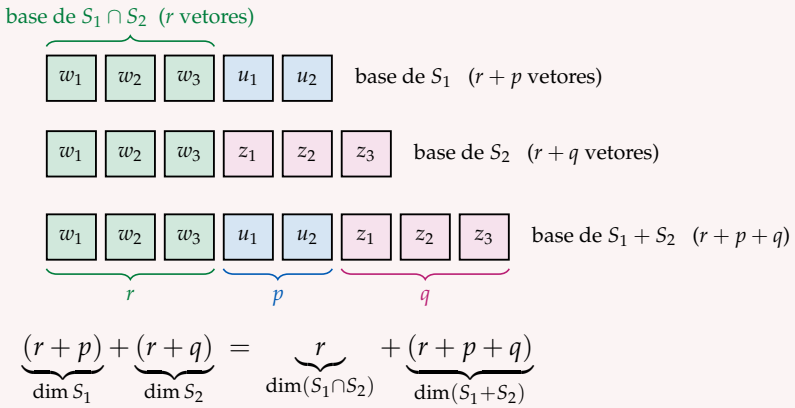
Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 2.19 (Soma de subespaços)

A demonstração exige: Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

Sejam S_1, S_2 subespaços de dimensão finita de V. Então

$$\dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2.$$



As três bases encaixadas. O miolo comum são os w; os "braços" são os u (de S_1) e os z (de S_2). A conta do teorema é ler a figura: à esquerda o miolo é contado duas *vezes, à direita ele é contado* uma. *Todo o trabalho da demonstração é verificar que a linha de baixo é de fato linearmente independente.*

Demonstração

Seja $(w_1, \ldots, w_r)$ uma base de $S_1 \cap S_2$. Pelo Teorema 2.79 (Teorema do completamento), complete-a a uma base

$$(w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_p) \text{ de } S_1 \qquad \text{e a uma base} \qquad (w_1, \ldots, w_r, z_1, \ldots, z_q) \text{ de } S_2.$$

Afirmamos que

$$\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_p, z_1, \ldots, z_q)$$

é base de $S_1 + S_2$.

Gera: um elemento de $S_1 + S_2$ é $s_1 + s_2$ com $s_i \in S_i$; escrevendo cada s_i na base correspondente, tudo cai em $[\mathcal{B}]$.

É LI: suponha

$$\underbrace{\textstyle\sum_i a_i w_i + \sum_j b_j u_j}_{\in S_1} + \underbrace{\textstyle\sum_k c_k z_k}_{\in S_2} = 0.$$

Ponha $x = \sum_k c_k z_k$. Da igualdade, $x = -\sum_i a_i w_i - \sum_j b_j u_j \in S_1$; e $x \in S_2$ por construção. Logo $x \in S_1 \cap S_2$ e podemos escrever $x = \sum_i d_i w_i$. Então

$$\sum_k c_k z_k - \sum_i d_i w_i = 0,$$

e como $(w_1, \ldots, w_r, z_1, \ldots, z_q)$ é base de S_2, todos os c_k (e todos os d_i) são nulos. Voltando à igualdade original, sobra $\sum_i a_i w_i + \sum_j b_j u_j = 0$; como $(w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_p)$ é base de S_1, todos os a_i e b_j são nulos.

Portanto $\dim(S_1 + S_2) = r + p + q$, e

$$\dim S_1 + \dim S_2 = (r+p) + (r+q) = r + (r+p+q) = \dim(S_1 \cap S_2) + \dim(S_1 + S_2).$$

Usado em: Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam), Exemplo 2.87 (Dois planos distintos pela origem em $\mathbb{R}^3$ se cortam numa reta), Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais), Exemplo 2.89 (Em $\mathbb{R}^4$, dois subespaços de dimensão 3 se intersectam), Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção) (dem.), Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester) (dem.)

`thm-soma`

Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam)

Requer: Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços), Definição 2.24 (Soma direta)

A soma $S_1 + S_2$ é direta se e somente se $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2$.

Demonstração

A soma é direta $\iff S_1 \cap S_2 = \{0\} \iff \dim(S_1 \cap S_2) = 0$, e basta olhar a fórmula.

Usado em: Exemplo 2.88 (As dimensões confirmam $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \text{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Teorema 8.23 (Critério de diagonalização) (dem.), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$) (dem.)

`cor-direta`

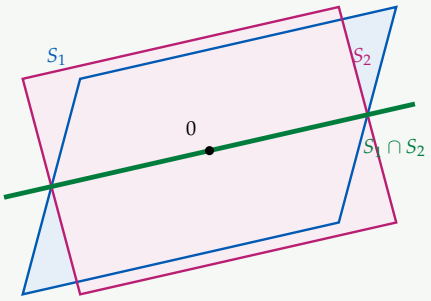
Exemplo 2.87 (Dois planos distintos pela origem em $\mathbb{R}^3$ se cortam numa reta)

Requer: Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)

Dois planos distintos por 0 *em* $\mathbb{R}^3$ *se cortam em uma reta.* De fato, $\dim S_1 = \dim S_2 = 2$ e $S_1 + S_2 \subset \mathbb{R}^3$ dá $\dim(S_1 + S_2) \leq 3$; logo

$$\dim(S_1 \cap S_2) = 4 - \dim(S_1 + S_2) \geq 1.$$

E como os planos são distintos, $S_1 + S_2$ tem dimensão 3, donde $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$ exatamente.



$$\begin{aligned} 2 + 2 &= \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2) \\ &= 3 + 1 \end{aligned}$$

Dois planos distintos por 0 *em* $\mathbb{R}^3$. *A soma deles é* $\mathbb{R}^3$ *inteiro, de dimensão* 3; *a fórmula obriga então a interseção a ter dimensão* 1. *Não há como dois planos se cruzarem apenas na origem — e a conta diz isso antes de qualquer desenho.*

`ex-dois-planos-em-r3`

Exemplo 2.88 (As dimensões confirmam $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \text{Sim} \oplus \mathcal{A}$)

Requer: Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam), Exemplo 2.77 (Dimensão das matrizes simétricas e das antissimétricas), Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \text{Sim} \oplus \mathcal{A}$)

$\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \text{Sim} \oplus \mathcal{A}$: já sabíamos que a interseção é nula (Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) =$

Sim $\oplus\mathcal{A}$)), e agora as dimensões confirmam, $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$.

ex-soma-b

Exemplo 2.89 (Em $\mathbb{R}^4$, dois subespaços de dimensão 3 se intersectam)

Requer: Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)

Em $\mathbb{R}^4$, dois subespaços de dimensão 3 nunca podem ter interseção nula: $\dim(S_1 \cap S_2) \geq 3 + 3 - 4 = 2$.
Em geral, $\dim(S_1 \cap S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim V$. Em $\mathbb{R}^3$, dois planos *têm* que se cortar numa reta (Exemplo 2.87 (Dois planos distintos pela origem em $\mathbb{R}^3$ se cortam numa reta)); em $\mathbb{R}^4$, dois planos podem se cortar só na origem, e a conta explica por quê.

ex-soma-c

Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Dados espaços vetoriais V e W, o **produto cartesiano** $V \times W = \{(v, w) : v \in V,\ w \in W\}$ é espaço vetorial com as operações feitas coordenada a coordenada:

$$(v, w) + (v', w') = (v + v',\ w + w'), \qquad \lambda(v, w) = (\lambda v,\ \lambda w).$$

Usado em: Exemplo 7.27 (A sequência exata de um produto cartesiano), Exercício 7.30 (Numa sequência exata curta, $V \cong U \times W$?), Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa)

def-prod

Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa)

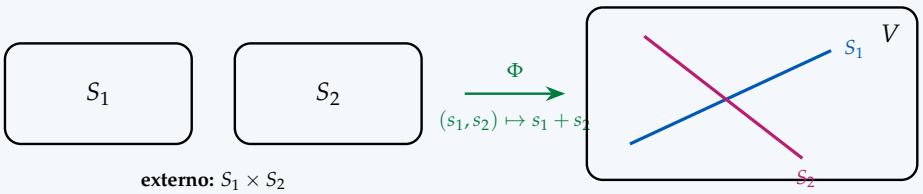
Requer: Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais), Definição 2.75 (Dimensão), Definição 2.24 (Soma direta), Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta), Proposição 1.37 (Propriedades básicas das transformações lineares)

Se $\dim V = n$ *e* $\dim W = m$, *então* $\dim(V \times W) = n + m$. *Além disso, se* $V = S_1 \oplus S_2$, *a aplicação*

$$\Phi : S_1 \times S_2 \longrightarrow V, \qquad \Phi(s_1, s_2) = s_1 + s_2,$$

é um isomorfismo.



externo: $S_1 \times S_2$
pares (s_1, s_2), lado a lado

interno: $V = S_1 \oplus S_2$
dois subespaços *dentro* de V

As duas somas diretas. À esquerda, a externa*: dois espaços quaisquer, postos lado a lado. À direita, a* interna*: dois subespaços de um mesmo V, com interseção nula; a seta é $\Phi(s_1, s_2) = s_1 + s_2$. A proposição diz que, quando a interna existe, as duas são a mesma coisa a menos de isomorfismo — e é por isso que se usa o mesmo símbolo $\oplus$ para as duas.*

Demonstração

Se $(v_1, \ldots, v_n)$ é base de V e $(w_1, \ldots, w_m)$ é base de W, então

$$\big((v_1,0), \ldots, (v_n,0),\ (0,w_1), \ldots, (0,w_m)\big)$$

gera $V \times W$ (pois $(v,w) = (v,0) + (0,w)$) e é LI (uma combinação nula obriga cada coordenada a se anular). Logo a dimensão é $n+m$.

Quanto a Φ: ela é linear, e é sobrejetora porque $V = S_1 + S_2$. É injetora porque $s_1 + s_2 = 0$ com $s_i \in S_i$ obriga $s_1 = -s_2 \in S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

Usado em: Exercício 7.30 (Numa sequência exata curta, $V \cong U \times W$?) (dem.)

Veja também: Nota 2.26 (Basta testar a unicidade no zero)

`prop-prod`

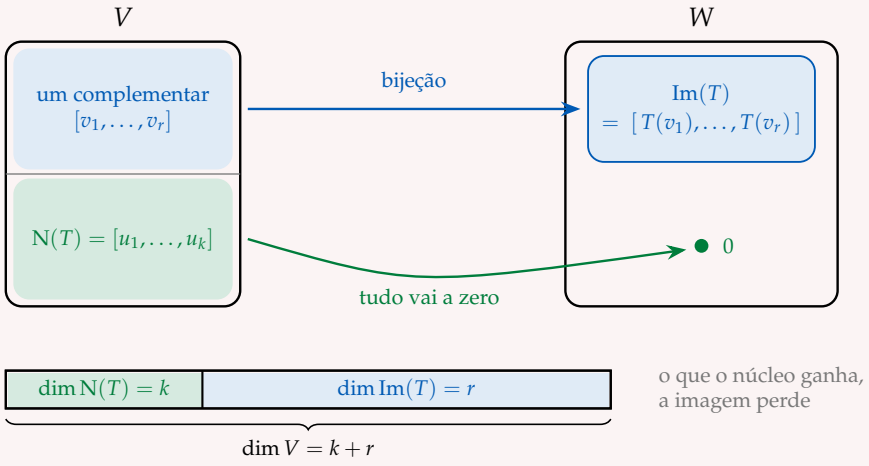
Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço), Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

Sejam V de dimensão finita, W um espaço vetorial e $T : V \to W$ linear. Então

$$\dim V = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T).$$



O teorema em uma figura. Escolhido um complementar do núcleo, T o leva bijetivamente *sobre a imagem, e esmaga o núcleo no zero. A demonstração consiste exatamente em verificar essas duas afirmações. A régua embaixo é a forma em que o teorema é usado: o comprimento total é* $\dim V$*, e as duas parcelas se compensam.*

A moral: a imagem é a cópia isomorfa de qualquer complementar do núcleo; T esmaga o núcleo e é injetora em tudo o que sobra. Essa frase antecipa o teorema do isomorfismo (Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$)).

Demonstração

Seja $(u_1, \ldots, u_k)$ uma base de $\mathrm{N}(T)$ — que tem dimensão finita, por ser subespaço de V (Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço)) — e complete-a a uma base

$$(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r) \quad \text{de } V, \qquad k + r = \dim V.$$

Afirmamos que $\big(T(v_1), \ldots, T(v_r)\big)$ é base de $\mathrm{Im}(T)$.

Gera: um elemento de $\mathrm{Im}(T)$ é $T(x)$ para algum $x \in V$. Escrevendo $x = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j$ e usando a linearidade,

$$T(x) = \sum_i a_i \underbrace{T(u_i)}_{=0} + \sum_j b_j T(v_j) = \sum_j b_j T(v_j).$$

É LI: suponha $\sum_j b_j T(v_j) = 0$. Por linearidade, $T\left(\sum_j b_j v_j\right) = 0$, isto é, $\sum_j b_j v_j \in \mathrm{N}(T) = [u_1, \ldots, u_k]$. Logo existem a_i com

$$\sum_j b_j v_j = \sum_i a_i u_i, \qquad \text{ou seja} \qquad \sum_i a_i u_i - \sum_j b_j v_j = 0.$$

Como $(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_r)$ é base de V, todos os coeficientes são nulos; em particular $b_j = 0$ para todo j.

Portanto $\dim \mathrm{Im}(T) = r = \dim V - k = \dim V - \dim \mathrm{N}(T)$.

Usado em: Exemplo 2.98 (A derivada: núcleo e imagem contados), Exemplo 2.97 (Dimensão das matrizes de traço nulo), Exemplo 2.96 (Sistemas homogêneos: dimensão do espaço de soluções), Exemplo 2.99 (Uma dimensão difícil de calcular na mão), Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração), Nota 3.40 (O teorema do núcleo e da imagem em quatro roupas), Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas), Corolário 2.94 (Dimensões diferentes: T não é injetora, ou não é sobrejetora) (dem.), Corolário 3.24 ($\dim N(A) = n - \text{posto } A$: a dimensão do conjunto solução) (dem.), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora) (dem.), Exercício 3.46 (Existe $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?) (dem.), Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato) (dem.), Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas) (dem.), Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo) (dem.), Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo) (dem.), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear) (dem.)

Veja também: Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$)

`thm-nucimg`

Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 1.36 (Transformação linear)

A demonstração exige: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

Sejam V e W de dimensão finita com $\dim V = \dim W$, e $T : V \to W$ linear. São equivalentes: (a) T é injetora; (b) T é sobrejetora; (c) T é bijetora.
A hipótese $\dim V = \dim W < \infty$ é essencial. O contra-exemplo é o Exemplo 1.65 (Deslocamentos nas sequências): injetor e não sobrejetor. Em dimensão finita isso é impossível — e é o que torna a álgebra linear em dimensão finita tão mais simples.

Demonstração

Pelo teorema, $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim V - \dim \mathrm{N}(T)$. Então

$$T \text{ injetora} \iff \mathrm{N}(T) = \{0\} \iff \dim \mathrm{Im}(T) = \dim V = \dim W$$

$$\iff \mathrm{Im}(T) = W \iff T \text{ sobrejetora},$$

onde a penúltima equivalência é o Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço) aplicado ao subespaço $\mathrm{Im}(T) \subset W$. A equivalência com (c) é imediata.

Usado em: Exemplo 2.98 (A derivada: núcleo e imagem contados), Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração), Nota 3.40 (O teorema do núcleo e da imagem em quatro roupas), Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$) (dem.), Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$) (dem.), Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha) (dem.), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno) (dem.)

Veja também: Exemplo 1.65 (Deslocamentos nas sequências), Exemplo 1.50 (Derivada e integral: $D \circ J = \mathrm{Id}$, mas $J \circ D \neq \mathrm{Id}$)

cor-equiv

Corolário 2.94 (Dimensões diferentes: T não é injetora, ou não é sobrejetora)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 1.36 (Transformação linear)

A demonstração exige: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)

Seja $T : V \to W$ linear, com V e W de dimensão finita.

(a) *Se* $\dim V > \dim W$, *então T não é injetora.*

(b) *Se* $\dim V < \dim W$, *então T não é sobrejetora.*

Demonstração

(a) $\dim \mathrm{N}(T) = \dim V - \dim \mathrm{Im}(T) \geq \dim V - \dim W > 0$. (b) $\dim \mathrm{Im}(T) \leq \dim V < \dim W$, logo $\mathrm{Im}(T) \neq W$ pelo Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço).

Usado em: Exemplo 2.96 (Sistemas homogêneos: dimensão do espaço de soluções)

cor-desig

Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$), Proposição 1.68 (Isomorfismo é uma relação de equivalência)

Dois espaços de dimensão finita são isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão. Em particular, $\dim V = n$ implica $V \cong \mathbb{R}^n$.

Demonstração

Se $\dim V = \dim W = n$, escolha bases e componha os isomorfismos da Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$): $V \xrightarrow{\varphi_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi_C^{-1}} W$. Reciprocamente, um isomorfismo $T : V \to W$ leva base em base: se $(v_1, \ldots, v_n)$ é base de V, então $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ gera $\mathrm{Im}(T) = W$ e é LI, porque $\sum b_j T(v_j) = 0$ dá $T(\sum b_j v_j) = 0$ e, sendo T injetora, $\sum b_j v_j = 0$.

Usado em: Exercício 7.30 (Numa sequência exata curta, $V \cong U \times W$?) (dem.), Exercício 5.57 (Subespaços de mesma dimensão têm quocientes isomorfos?) (dem.), Exercício 5.58 (Quocientes isomorfos implicam subespaços iguais?) (dem.), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$) (dem.)

cor-isom

Exemplo 2.96 (Sistemas homogêneos: dimensão do espaço de soluções)

Requer: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Corolário 2.94 (Dimensões diferentes: T não é injetora, ou não é sobrejetora), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

Sistemas homogêneos. Um sistema homogêneo com m equações e n incógnitas é $T(X) = 0$ para $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Então

$$\dim(\text{espaço de soluções}) = \dim \mathrm{N}(T) = n - \dim \mathrm{Im}(T) \geq n - m.$$

Em particular, se $n > m$ — mais incógnitas do que equações — o sistema tem solução não trivial. É o item (a) do Corolário 2.94 (Dimensões diferentes: T não é injetora, ou não é sobrejetora) em roupa de sistema.

Veja também: Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações), Corolário 3.24 ($\dim N(A) = n -$ posto A: a dimensão do conjunto solução)

`ex-dimensao-do-espaco-de-solucoes`

Exemplo 2.97 (Dimensão das matrizes de traço nulo)

Requer: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Exemplo 1.64 (Núcleo e imagem do traço), Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

O traço. $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é linear e sobrejetora (pois $\operatorname{tr} E_{11} = 1$). Logo

$$\dim\{A : \operatorname{tr} A = 0\} = n^2 - 1.$$

Repare que não exibimos base alguma: a dimensão saiu da contagem.

`ex-dimensao-das-matrizes-de-traco-nulo`

Exemplo 2.98 (A derivada: núcleo e imagem contados)

Requer: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Exemplo 1.62 (Núcleo e imagem da derivada), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)

A derivada. $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $D(p) = p'$. O núcleo são as constantes, de dimensão 1, logo $\dim \operatorname{Im}(D) = (n+1) - 1 = n$; e de fato $\operatorname{Im}(D) = \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. Note que D não é injetora nem sobrejetora — coerente com o Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), que só proíbe uma das duas sem a outra.

`ex-derivada-nucleo-e-imagem-contados`

Exemplo 2.99 (Uma dimensão difícil de calcular na mão)

Requer: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Uma dimensão difícil de calcular na mão. Em $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, seja

$$S = \{A \in V :\ a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33}\},$$

isto é, as matrizes cujas três linhas têm a mesma soma. Definindo $T : V \to \mathbb{R}^2$ por $T(A) = (r_1 - r_2,\ r_2 - r_3)$, onde r_i é a soma da i-ésima linha, temos $S = \mathrm{N}(T)$. E T é sobrejetora: a matriz com primeira linha $(1,0,0)$ e o resto nulo vai em $(1,0)$; a com terceira linha $(1,0,0)$ e o resto nulo vai em $(0,-1)$. Logo

$$\dim S = 9 - 2 = 7.$$

O teorema é usado aqui como *ferramenta de cálculo*, e não como resultado estrutural. Achar uma base desse S à mão é desagradável; a contagem sai em três linhas.

`ex-matrizes-com-linhas-de-mesma-soma`

Capítulo 3

Matrizes e sistemas lineares

A matriz de uma transformação linear e mudança de base

Motivação 3.1 (Por que uma transformação linear tem matriz)

Requer: Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$), Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador), Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$)

Dois fatos sobre bases:

- Se $B = (v_1, \ldots, v_n)$ é base de V, a aplicação de coordenadas $\varphi_B(v) = [v]_B$ é um *isomorfismo* $V \to \mathbb{R}^n$ (Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)).
- Uma transformação linear fica determinada pelos valores que assume numa base (Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador)) — e esses valores podem ser prescritos livremente (Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$)).

A segunda observação é o que torna possível a definição de matriz de uma transformação linear (Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)); a primeira é o que a torna útil.

Veja também: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

`mot-matriz-de-uma-transformacao`

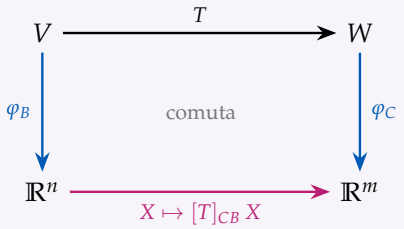
Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

Requer: Definição 2.66 (Coordenadas numa base), Definição 1.36 (Transformação linear)

Sejam $T : V \to W$ linear, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ base de V e $C = (w_1, \ldots, w_m)$ base de W. A **matriz de T nas bases B e C** é a matriz $[T]_{CB} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ cuja *j-ésima coluna* é $[T(v_j)]_C$. Em fórmula: os números a_{ij} definidos por

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

são as entradas de $[T]_{CB} = (a_{ij})$.



$\varphi_C \circ T = M_{[T]_{CB}} \circ \varphi_B$,
isto é, $[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$.

O quadrado que define a matriz de T. As duas setas verticais são as bases (Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)); a de cima é a transformação que interessa; a de baixo é uma matriz. Dizer "a matriz de T" é dizer que existe uma única seta de baixo que faz o quadrado comutar.

Duas armadilhas de notação. *(i)* A base do *contradomínio* vem primeiro no símbolo $[T]_{CB}$, na mesma ordem em que aparece na fórmula $[T(v)]_C = [T]_{CB}[v]_B$ (Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$)) — o B fica encostado no $[v]_B$. *(ii)* Os índices de a_{ij} estão "trocados" em relação à expressão de $T(v_j)$, e isso é proposital, para que a fórmula do produto de matrizes saia certa.

Usado em: Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível), Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador), Definição 8.22 (Operador diagonalizável), Definição 3.12 (Matriz de mudança de base), Exemplo 3.4 (A matriz da derivada em duas bases), Exemplo 3.5 (A matriz da identidade), Exemplo 3.6 (Matriz de uma transformação $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$), Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$), Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais), Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes), Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz)

Veja também: Motivação 3.1 (Por que uma transformação linear tem matriz), Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz), Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$)

`def-matriz`

Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$)

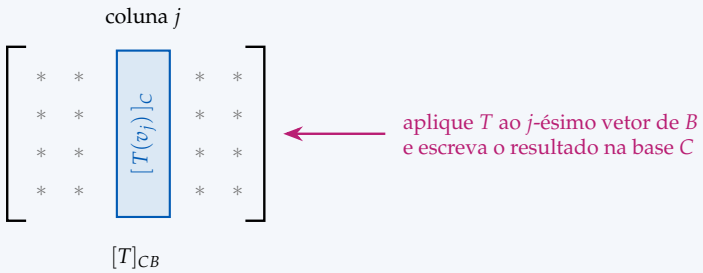
Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

A demonstração exige: Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)

Com a notação da Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), vale

$$[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B \qquad \text{para todo } v \in V,$$

e $[T]_{CB}$ é a única matriz com essa propriedade.



Como se monta a matriz, na prática. Uma coluna de cada vez, e cada coluna é uma conta de coordenadas na base de chegada. *Os erros de sinal ou de transposição vêm, em geral, de esquecer que a conta é feita em C, não em B.*

A leitura da unicidade: *multiplicar por e_j lê a j-ésima coluna.* É a razão de a definição ser "por colunas".

Demonstração

Escreva $v = \sum_j x_j v_j$, isto é, $[v]_B = (x_1, \ldots, x_n)$. Pela linearidade de T e de $[\,\cdot\,]_C$,

$$[T(v)]_C = \Big[\sum_j x_j T(v_j)\Big]_C = \sum_j x_j\,[T(v_j)]_C = \sum_j x_j \cdot (j\text{-ésima coluna de } [T]_{CB}) = [T]_{CB}\,[v]_B,$$

onde a última igualdade é a definição de produto matriz-vetor.

Unicidade: se M satisfaz $[T(v)]_C = M[v]_B$ para todo v, tome $v = v_j$. Como $[v_j]_B = e_j$, o produto Me_j é a j-ésima coluna de M; logo essa coluna é $[T(v_j)]_C$, e $M = [T]_{CB}$.

Usado em: Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas) (dem.), Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes) (dem.)

`prop-acao`

Exemplo 3.4 (A matriz da derivada em duas bases)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Exemplo 1.39 (A derivada é linear), Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$)

A derivada em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Com $B = C = (1, x, x^2, x^3)$, temos $D(1) = 0$, $D(x) = 1$, $D(x^2) = 2x$, $D(x^3) = 3x^2$, logo

$$[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora troque a base para $B' = \left(1,\ x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{6}\right)$: como $D\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, a matriz vira

$$[D]_{B'B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O mesmo operador, duas matrizes. A segunda é claramente mais simples — e escolher bem a base para simplificar a matriz é, em uma frase, o assunto de metade do curso.

Usado em: Exemplo 8.20 (Dois operadores que derivam: D e $x\,D$)

`ex-matriz-da-derivada`

Exemplo 3.5 (A matriz da identidade)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

A identidade. $[\mathrm{Id}]_{BB} = I_n$ para *qualquer* base B. Mas $[\mathrm{Id}]_{CB}$ com $C \neq B$ não é a identidade — é a matriz de mudança de base (Definição 3.12 (Matriz de mudança de base)).

Veja também: Definição 3.12 (Matriz de mudança de base)

`ex-matriz-da-identidade`

Exemplo 3.6 (Matriz de uma transformação $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares), Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

Uma transformação entre espaços diferentes. Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a+d) + (a+b+c)x + (b+c+d)x^2 + ax^3.$$

Nas bases $\widetilde{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ e $\widetilde{F} = (1, x, x^2, x^3)$, cada coluna sai avaliando T numa E_{ij}: $T(E_{11}) = 1 + x + x^3$, $T(E_{12}) = x + x^2$, $T(E_{21}) = x + x^2$, $T(E_{22}) = 1 + x^2$, e portanto

$$[T]_{\widetilde{F}\widetilde{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Repare que as colunas 2 e 3 são iguais: já se lê daí que T não é injetora, e que $E_{12} - E_{21} \in \mathrm{N}(T)$.
É um primeiro exemplo de "ler a transformação na matriz".

`ex-matriz-entre-espacos-diferentes`

Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear)

A demonstração exige: Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$)

Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to U$ lineares, e B, C, D bases de V, W, U. Então

$$[\,S \circ T\,]_{DB} = [S]_{DC}\,[T]_{CB}.$$

Demonstração

Para todo $v \in V$, aplicando duas vezes a Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$),

$$[(S \circ T)(v)]_D = [\,S(T(v))\,]_D = [S]_{DC}\,[T(v)]_C = [S]_{DC}[T]_{CB}\,[v]_B.$$

Pela unicidade na Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$), $[S \circ T]_{DB} = [S]_{DC}[T]_{CB}$.

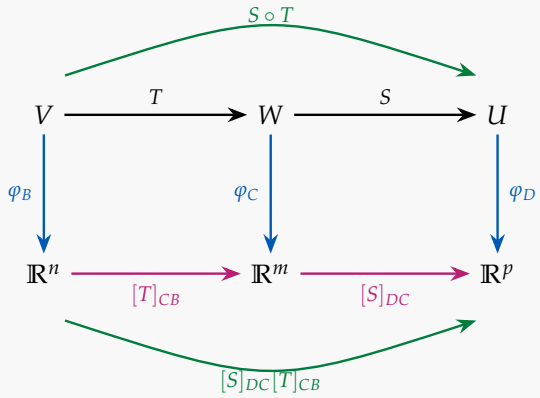
Usado em: Exemplo 3.11 (Rotações e as fórmulas de adição), Nota 3.8 (Por que o produto de matrizes é definido assim), Corolário 5.18 ($(AB)^t = B^t A^t$) (dem.), Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível) (dem.), Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$) (dem.)

`thm-comp`

Nota 3.8 (Por que o produto de matrizes é definido assim)

Requer: Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes)

O Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes) não é um fato sobre matrizes: é a *razão* de o produto de matrizes ser definido daquele jeito estranho, com linhas contra colunas. A definição de produto foi escolhida para que a composição de transformações lineares corresponda a ele. O produto de matrizes não é uma convenção arbitrária.



Dois quadrados colados. Percorrer o caminho de cima e descer é o mesmo que descer e percorrer o de baixo — e é só isso que o teorema diz. A seta verde de baixo é o produto de matrizes; a de cima é a composição.

`nota-produto`

Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V,W)$ é um espaço vetorial), Definição 1.66 (Isomorfismo), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador), Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1,\dots,e_n$), Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$), Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão), Exemplo 2.76 (Dimensões de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

A aplicação $\Psi(T) = [T]_{CB}$ é um isomorfismo $\mathcal{L}(V,W) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Em particular, $\dim \mathcal{L}(V,W) = mn$.

Demonstração

Linear: $(T+\lambda S)(v_j) = T(v_j) + \lambda S(v_j)$, e $[\,\cdot\,]_C$ é linear; logo as colunas se somam.
Injetora: se $[T]_{CB} = 0$, então $T(v_j) = 0$ para todo j; como os v_j geram V, $T = 0$.
Sobrejetora: dada $M = (a_{ij})$, defina T prescrevendo $T(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$ — o que é legítimo, porque uma transformação linear pode ser definida livremente numa base (Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1,\dots,e_n$), transportada pelo isomorfismo de coordenadas da Proposição 2.67 (As coordenadas dão um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)). Por construção $[T]_{CB} = M$.
Logo $\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Usado em: Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível) (dem.), Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo) (dem.)

`prop-matriz-de-transformacao-e-isomorfismo`

Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes), Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)

$T : V \to W$ é isomorfismo se e somente se $[T]_{CB}$ é invertível; e nesse caso $[T^{-1}]_{BC} = \big([T]_{CB}\big)^{-1}$.

Demonstração

Se T é isomorfismo, de $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$ e $T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_W$ e do Teorema 3.7 (A matriz da

composta é o produto das matrizes) vem

$$[T^{-1}]_{BC}[T]_{CB} = I_n \qquad \text{e} \qquad [T]_{CB}[T^{-1}]_{BC} = I_m,$$

o que já dá tudo. Reciprocamente, se $[T]_{CB}$ é invertível, seja S a transformação com $[S]_{BC} = ([T]_{CB})^{-1}$, que existe pela Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$); então $[S\circ T]_{BB} = I$ e $[T\circ S]_{CC} = I$, e pela injetividade de Ψ concluímos $S\circ T = \mathrm{Id}$ e $T\circ S = \mathrm{Id}$.

Usado em: Exemplo 4.29 (Vandermonde e interpolação), Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador) (dem.), Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento) (dem.), Proposição 4.24 (T é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$) (dem.), Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas) (dem.)

`cor-inv`

Exemplo 3.11 (Rotações e as fórmulas de adição)

Requer: Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes), Exemplo 1.44 (Rotação e projeção em $\mathbb{R}^2$)

Rotações, e as fórmulas de adição de graça. Seja $T_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a rotação de ângulo θ. Na base canônica,

$$[T_\theta] = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

porque a primeira coluna é a imagem de e_1 e a segunda a de e_2. Como $T_\theta \circ T_\varphi = T_{\theta+\varphi}$, o Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes) dá

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix},$$

e comparando a primeira coluna dos dois lados saem

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \qquad \operatorname{sen}(\theta+\varphi) = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi.$$

Usado em: Exemplo 8.49 (Rotação com dilatação: a matriz de $a+ib$), Exemplo 8.21 (A rotação não tem autovalor real), Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo) (dem.)

`ex-rotacao-matriz`

Definição 3.12 (Matriz de mudança de base)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

Sejam B e B' bases de V. A **matriz de mudança de base de B' para B** é

$$[I]_{BB'} := [\,\mathrm{Id}_V\,]_{BB'},$$

isto é, a matriz cuja j-ésima coluna é $[v'_j]_B$, onde $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$.

É o caso particular $T = \mathrm{Id}$ da Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear); por isso a mudança de base não exige nenhuma ideia nova.

Usado em: Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais), Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear), Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas), Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$)

Veja também: Exemplo 3.5 (A matriz da identidade)

`def-mudanca`

Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas)

Requer: Definição 3.12 (Matriz de mudança de base)

A demonstração exige: Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$), Corolário 3.10 ($T$ é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível)

Para todo $v \in V$ vale $[v]_B = [I]_{BB'}\,[v]_{B'}$. Além disso $[I]_{BB'}$ é invertível, com $([I]_{BB'})^{-1} = [I]_{B'B}$.

A matriz $[I]_{BB'}$ *não* muda o vetor: ela muda a *descrição* do vetor. E cuidado com a direção: as colunas de $[I]_{BB'}$ são os vetores de B' escritos em B, e ela converte coordenadas de B' em coordenadas de B. É invertido em relação ao que a intuição sugere. Em resumo: *colunas de B' em B; converte B' em B.*

Demonstração

A primeira afirmação é a Proposição 3.3 ($[T(v)]_C = [T]_{CB}\,[v]_B$) aplicada a $T = \mathrm{Id}$. A segunda é o Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível) aplicado a $T = \mathrm{Id}$, que é isomorfismo.

Usado em: Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo), Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear) (dem.), Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$) (dem.)

`prop-mudanca`

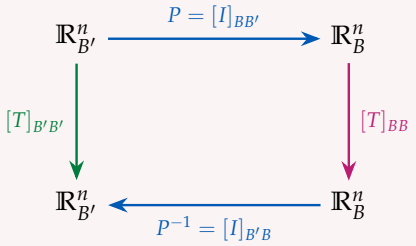
Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$)

Requer: Definição 3.12 (Matriz de mudança de base)

A demonstração exige: Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes), Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas)

Seja $T : V \to V$ linear e sejam B, B' bases de V. Pondo $P = [I]_{BB'}$, vale

$$[T]_{B'B'} = P^{-1}\,[T]_{BB}\,P.$$



o caminho direto (verde)
é igual ao desvio (azul–rosa–azul):
traduza para B, aplique T,
traduza de volta.

A mudança de base como um desvio. Os quatro cantos são o mesmo $\mathbb{R}^n$*, com dicionários diferentes; a fórmula $P^{-1}[T]_B P$ só diz que dá no mesmo traduzir, agir e destraduzir. Desenhado assim, ninguém erra a ordem dos fatores nem qual é a inversa.*

Demonstração

Escreva $T = \mathrm{Id} \circ T \circ \mathrm{Id}$ e aplique o Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes) duas vezes, escolhendo as bases de modo a atravessar B:

$$[T]_{B'B'} = [\,\mathrm{Id}\,]_{B'B}\,[T]_{BB}\,[\,\mathrm{Id}\,]_{BB'} = [I]_{B'B}\,[T]_{BB}\,[I]_{BB'} = P^{-1}[T]_{BB}P.$$

Usado em: Definição 4.23 (Determinante de um operador), Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo), Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador) (dem.)

`thm-conj`

Definição 3.15 (Matrizes semelhantes)

Duas matrizes $A, A' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são **semelhantes** (ou *conjugadas*) quando existe P invertível com $A' = P^{-1}AP$.

Usado em: Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador), Exercício 9.27 (Mesma assinatura implica mesmos autovalores?) (dem.)

Veja também: Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$)

`def-semelh`

Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador)

Requer: Definição 3.15 (Matrizes semelhantes), Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

A demonstração exige: Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$), Corolário 3.10 ($T$ é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível)

Duas matrizes representam o mesmo operador $T : V \to V$ em bases diferentes se e somente se são semelhantes.

Demonstração

Uma direção é o Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$). Reciprocamente, se $A' = P^{-1}AP$ e $A = [T]_{BB}$, seja B' a base cujos vetores têm por coordenadas em B as colunas de P; ela é base porque P é invertível (Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível)), e por construção $[I]_{BB'} = P$, donde $[T]_{B'B'} = A'$.

Usado em: Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal)

Veja também: Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal)

`cor-semelh`

Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo)

Requer: Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$), Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)

Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, sejam

$$B = (1,\ t,\ t^2) \qquad \text{e} \qquad B' = (1+t,\ t+t^2,\ 1+t^2).$$

(i) B' é base e a matriz de mudança. As coordenadas dos vetores de B' na base B são $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$, logo

$$P = [I]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esses três vetores são LI — de $a(1,1,0)+b(0,1,1)+c(1,0,1)=0$ vem $a+c=0$, $a+b=0$ e $b+c=0$, donde $a=b=c=0$ —, logo B' é base pelo item (b) do Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base). A matriz P é invertível pela Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas), e um cálculo direto dá

$$P^{-1} = [I]_{B'B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Coordenadas. Para $p = 1 + 2t + 3t^2$, temos $[p]_B = (1, 2, 3)$ e

$$[p]_{B'} = P^{-1}[p]_B = \tfrac{1}{2}(1 + 2 - 3,\ -1 + 2 + 3,\ 1 - 2 + 3) = (0,\ 2,\ 1),$$

o que se confere: $2(t + t^2) + (1 + t^2) = 1 + 2t + 3t^2$. ✓

(iii) Um operador nas duas bases. Tome $D(p) = p'$. Então

$$[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad [D]_{B'B'} = P^{-1}[D]_{BB}P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Confira uma coluna diretamente, que é o que convence: $D(1 + t) = 1$, e $1 = \frac{1}{2}(1 + t) - \frac{1}{2}(t + t^2) + \frac{1}{2}(1 + t^2)$, isto é $[D(1 + t)]_{B'} = \frac{1}{2}(1, -1, 1)$ — que é exatamente a primeira coluna. ✓

`ex-p2`

Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal)

Requer: Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador)

A pergunta que fica. Pela Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear), a matriz $[T]_{BB}$ é *diagonal* exatamente quando

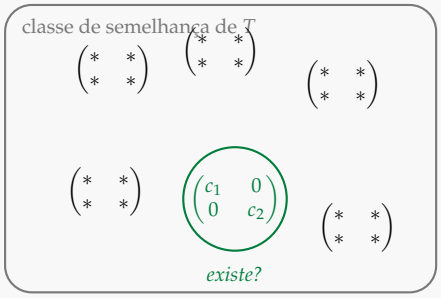
$$T(v_j) = c_j\, v_j \qquad \text{para todo } j,$$

isto é, quando cada vetor da base é levado por T em um múltiplo de si mesmo. Duas perguntas se impõem:

(1) dado T, existe uma base assim?

(2) quando existe, como achá-la?

São as perguntas da diagonalização (Definição 8.22 (Operador diagonalizável)). Por ora, note que a resposta a (1) é *às vezes*: a rotação de 90° em $\mathbb{R}^2$ não leva reta nenhuma nela mesma, logo não há base em que sua matriz seja diagonal.



trocar de base = andar dentro da caixa;

a pergunta da diagonalização: há uma matriz diagonal dentro dela?

Todas as matrizes de um mesmo operador, em todas as bases possíveis, formam uma caixa — a classe de semelhança. Escolher a base é escolher um elemento dessa caixa, e a pergunta natural é se existe um elemento diagonal.

Usado em: Teorema 8.23 (Critério de diagonalização) (dem.)

Veja também: Definição 8.22 (Operador diagonalizável), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

`nota-diag`

Sistemas lineares: escalonamento, posto e o conjunto solução

Definição 3.19 (Sistema linear)

Requer: Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

Um **sistema linear** de m equações e n incógnitas é

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad \text{ou, em forma matricial,} \qquad AX = b,$$

com $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $X \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. A matriz $[\,A \mid b\,] \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{R})$ é a **matriz ampliada**. O sistema é **homogêneo** quando $b = 0$.

Usado em: Corolário 4.27 (Regra de Cramer), Corolário 3.24 (dim $N(A) = n -$ posto A: a dimensão do conjunto solução), Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm), Corolário 3.25 (Mais incógnitas do que equações: há solução não trivial), Nota 5.27 (O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações), Nota 3.20 (Duas leituras de um sistema: por linhas e por colunas), Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A), Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução), Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$), Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada), Teorema 6.30 (Mínimos quadrados: as equações normais)

Veja também: Nota 1.61 (Sistemas lineares, antecipados)

`def-sist`

Nota 3.20 (Duas leituras de um sistema: por linhas e por colunas)

Requer: Definição 3.19 (Sistema linear)

Há duas leituras da equação $AX = b$:

- *Por linhas.* Cada equação $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ descreve um hiperplano (afim) de $\mathbb{R}^n$, e o conjunto solução é a interseção dos m hiperplanos.
- *Por colunas.* Escrevendo $A = [\,C_1 \ \cdots \ C_n\,]$ em colunas,

$$AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n,$$

de modo que resolver $AX = b$ é perguntar *de quantas maneiras b se escreve como combinação linear das colunas de A*.

A primeira leitura é a geométrica; a segunda é a que conecta os sistemas com combinações lineares, geradores e imagem.

Usado em: Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A) (dem.)

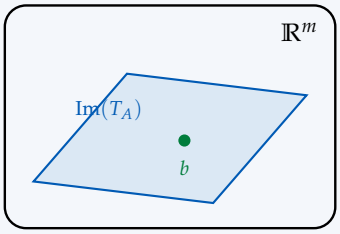
`nota-duas`

Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A)

Requer: Definição 3.19 (Sistema linear), Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Definição 2.37 (Conjunto gerador)

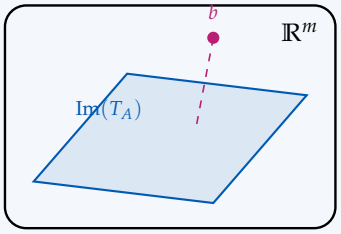
A demonstração exige: Nota 3.20 (Duas leituras de um sistema: por linhas e por colunas)

O sistema $AX = b$ tem solução se e somente se $b \in \mathrm{Im}(T_A) = [\,C_1, \ldots, C_n\,]$. Em particular, $AX = b$ tem solução para todo $b \in \mathbb{R}^m$ se e somente se as colunas de A geram $\mathbb{R}^m$.



compatível

$\text{posto}\, A = \text{posto}[\, A \mid b \,]$



incompatível

$\text{posto}\, A < \text{posto}[\, A \mid b \,]$

A pergunta da compatibilidade é uma pergunta de pertinência: b está ou não no subespaço gerado pelas colunas? Acrescentar b como uma coluna a mais faz o posto subir exatamente no caso incompatível — é isso que o Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada) transforma num teste prático.

Demonstração

É a Nota 3.20 (Duas leituras de um sistema: por linhas e por colunas) relida: existir X com $AX = b$ é existir uma combinação linear das colunas igual a b.

Usado em: Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm) (dem.)

Veja também: Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada), Nota 1.61 (Sistemas lineares, antecipados)

`prop-compat`

Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$)

Requer: Definição 3.19 (Sistema linear), Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

Suponha que $AX = b$ tenha alguma *solução X_0. Então o conjunto de todas as soluções é*

$$\{X \in \mathbb{R}^n : AX = b\} \;=\; X_0 + N(A) \;=\; \{X_0 + Y \;:\; AY = 0\}.$$

Demonstração

($\supseteq$) Se $AY = 0$, então $A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = b + 0 = b$.

($\subseteq$) Se $AX = b$, ponha $Y = X - X_0$. Então $AY = AX - AX_0 = b - b = 0$, isto é, $Y \in N(A)$, e $X = X_0 + Y$.

Usado em: Exemplo 3.38 (Discussão de um sistema com parâmetro), Corolário 3.24 (dim $N(A) = n -$ posto A: a dimensão do conjunto solução) (dem.)

Veja também: Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo), Nota 1.61 (Sistemas lineares, antecipados)

`thm-afim`

Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Exemplo 1.38 (Multiplicação por uma matriz)

O **posto** de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é $\text{posto}\, A := \dim \mathrm{Im}(T_A)$, isto é, a dimensão do subespaço gerado pelas colunas de A. (Por isso ele também é chamado *posto-coluna*; o posto-linha dá o mesmo número: Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas).)

Usado em: Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência), Corolário 3.24 (dim $N(A) = n -$ posto A: a dimensão do conjunto solução), Corolário 5.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas, pelo

dual), Exemplo 8.30 (Uma matriz 3×3 diagonalizável com autovalor duplo), Exemplo 8.31 (Raízes reais, mas não diagonalizável), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto), Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada), Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas), Exercício 3.45 (Toda base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ contém uma matriz invertível?) (dem.)

Veja também: Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas)

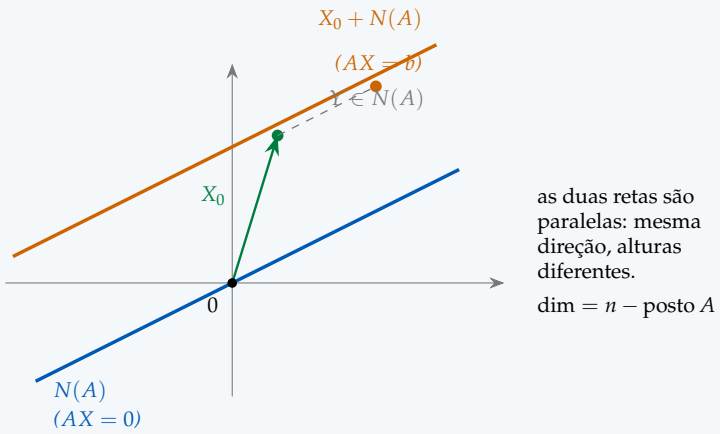
`def-posto`

Corolário 3.24 ($\dim N(A) = n - \text{posto } A$: a dimensão do conjunto solução)

Requer: Definição 3.23 (Posto de uma matriz), Definição 3.19 (Sistema linear)

A demonstração exige: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$)

Para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ vale $\dim N(A) = n - \text{posto } A$. *Em consequência, se $AX = b$ é compatível, o seu conjunto solução é um* subespaço afim *de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n - \text{posto } A$: um transladado do espaço solução do sistema homogêneo associado.*



O teorema em uma figura. O conjunto solução de um sistema compatível é o espaço solução do homogêneo empurrado *por uma solução particular qualquer. Ele tem a mesma dimensão, mas não passa pela origem — e por isso não é subespaço, a menos que $b = 0$.*

Três leituras da figura: o conjunto solução não é subespaço, salvo se $b = 0$; trocar X_0 por outra solução não muda o conjunto; e se $N(A) = \{0\}$ ele se reduz a um ponto: a solução é única.

Demonstração

É o Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem) aplicado a $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $n = \dim N(T_A) + \dim \text{Im}(T_A)$. O resto é o Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$).

Usado em: Exemplo 3.39 (As duas descrições de um subespaço: geradores e equações), Exemplo 3.37 (Um sistema resolvido por completo), Nota 3.40 (O teorema do núcleo e da imagem em quatro roupas), Corolário 3.25 (Mais incógnitas do que equações: há solução não trivial) (dem.), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto) (dem.)

Veja também: Exemplo 2.96 (Sistemas homogêneos: dimensão do espaço de soluções)

`cor-dimsol`

Corolário 3.25 (Mais incógnitas do que equações: há solução não trivial)

Requer: Definição 3.19 (Sistema linear)

A demonstração exige: Corolário 3.24 ($\dim N(A) = n - \text{posto } A$: a dimensão do conjunto solução)

Se $m < n$ — mais incógnitas do que equações —, então o sistema homogêneo $AX = 0$ tem solução não trivial.
O enunciado é o do Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações), usado na demonstração do lema da troca (Lema 2.53 (Lema da troca)); aqui ele sai da contagem de dimensões.

Demonstração

$\operatorname{posto} A = \dim \operatorname{Im}(T_A) \leq \dim \mathbb{R}^m = m < n$, logo $\dim N(A) = n - \operatorname{posto} A > 0$.

Veja também: Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações), Lema 2.53 (Lema da troca)

`cor-maisinc`

Definição 3.26 (Operações elementares)

Uma **operação elementar** sobre as linhas de uma matriz é uma das três:

(I) trocar duas linhas de posição;

(II) multiplicar uma linha por um escalar $\lambda \neq 0$;

(III) somar a uma linha um múltiplo de outra.

Usado em: Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante), Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução), Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida)

`def-opel`

Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução)

Requer: Definição 3.26 (Operações elementares), Definição 3.19 (Sistema linear), Definição 2.17 (Subespaço gerado)

Operações elementares sobre $[\,A \mid b\,]$ não alteram o conjunto solução de $AX = b$. Mais ainda: elas não alteram $N(A)$ nem o espaço gerado pelas linhas de A.

Demonstração

Cada operação é *reversível* — (I) por si mesma, (II) multiplicando por λ^{-1}, (III) subtraindo o mesmo múltiplo. Logo basta ver que toda solução do sistema antigo é solução do novo, o que é imediato: cada equação nova é combinação linear das antigas. Aplicando o mesmo raciocínio à operação inversa, os dois conjuntos solução coincidem. O mesmo argumento com $b = 0$ dá $N(A)$ inalterado, e o fato de que cada linha nova é combinação das antigas (e vice-versa) dá o espaço-linha inalterado.

Usado em: Nota 3.28 (Operações elementares como multiplicação por matrizes), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto) (dem.), Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas) (dem.)

`prop-opel`

Nota 3.28 (Operações elementares como multiplicação por matrizes)

Requer: Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução)

Em termos de matrizes: cada operação elementar é a multiplicação *à esquerda* por uma matriz E invertível (a matriz elementar correspondente, obtida aplicando a operação à identidade). Assim, escalonar é passar de $AX = b$ para $(EA)X = Eb$, e a

Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução) vira a observação de que $EAX = Eb \iff AX = b$ quando E é invertível.

Vale destacar o que *não* se preserva: as operações de linha *mudam* o espaço gerado pelas colunas. Elas preservam o núcleo e o espaço-linha, e é só isso que usaremos.

Usado em: Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento) (dem.)

`nota-elem`

Definição 3.29 (Forma escada)

Uma matriz está na **forma escada** quando: as linhas nulas ficam abaixo das não nulas, e o primeiro elemento não nulo de cada linha — o **pivô** — está estritamente à direita do pivô da linha acima. A forma é **reduzida** quando, além disso, todo pivô vale 1 e é o único elemento não nulo da sua coluna.

Usado em: Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto), Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada), Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida)

`def-escada`

Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida)

Requer: Definição 3.29 (Forma escada), Definição 3.26 (Operações elementares)

Toda matriz pode ser levada a uma forma escada reduzida por uma sequência finita de operações elementares.

Demonstração

(O algoritmo de Gauss–Jordan.) Procure a primeira coluna não nula; troque linhas para pôr nela uma entrada não nula, divida a linha por essa entrada para o pivô virar 1, e some múltiplos dessa linha às demais para zerar o resto da coluna. Repita o procedimento na submatriz que sobra abaixo e à direita. Como a cada passo descemos uma linha, o processo termina em no máximo m passos.

Usado em: Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas) (dem.)

Veja também: Nota 3.33 (O que se lê na forma escada reduzida), Lema 2.52 (Sistema homogêneo com mais incógnitas do que equações)

`thm-gauss`

Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto)

Requer: Definição 3.29 (Forma escada), Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

A demonstração exige: Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução), Corolário 3.24 (dim $N(A) = n -$ posto A: a dimensão do conjunto solução)

Seja R uma forma escada de A, com p pivôs. Então posto $A = p$ e $\dim N(A) = n - p$.

Demonstração

Pela Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução), $N(R) = N(A)$. Em R, atribuindo valores arbitrários às $n - p$ variáveis livres, cada equação determina, de baixo para cima, a variável do pivô correspondente: existe uma e uma só solução para cada escolha. Isso exibe uma bijeção linear entre $\mathbb{R}^{n-p}$ e $N(R)$, logo $\dim N(A) = \dim N(R) = n - p$. Pelo

Corolário 3.24 (dim $N(A) = n - \text{posto}\, A$: a dimensão do conjunto solução), $\text{posto}\, A = n - \dim N(A) = p$.

Usado em: Nota 3.33 (O que se lê na forma escada reduzida), Nota 3.40 (O teorema do núcleo e da imagem em quatro roupas), Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento) (dem.), Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada) (dem.), Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas) (dem.)

`prop-pivos`

Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada)

Requer: Definição 3.29 (Forma escada), Definição 3.19 (Sistema linear), Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

A demonstração exige: Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto)

$AX = b$ é compatível se e somente se, numa forma escada de $[\,A \mid b\,]$, não aparece nenhuma linha da forma $(\,0 \;\cdots\; 0 \mid c\,)$ com $c \neq 0$; equivalentemente, se e somente se $\text{posto}\, A = \text{posto}[\,A \mid b\,]$.

Demonstração

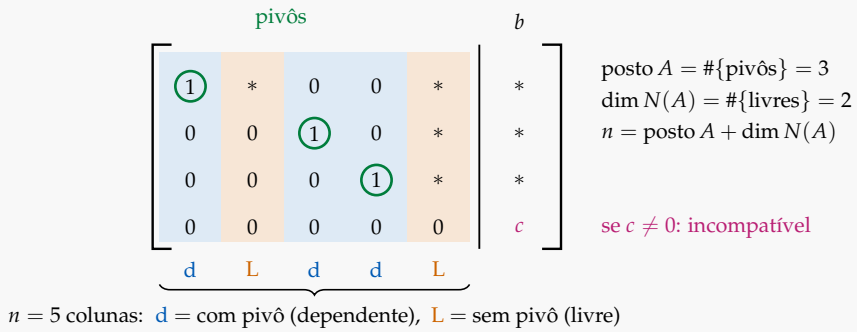
Uma linha $(\,0 \;\cdots\; 0 \mid c\,)$ com $c \neq 0$ é a equação $0 = c$, impossível; e como o escalonamento preserva o conjunto solução, o sistema original também é impossível. Se nenhuma linha assim aparece, o algoritmo da Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto) produz uma solução (atribua 0 às livres). Quanto à segunda formulação: acrescentar a coluna b faz o número de pivôs subir exatamente quando surge um pivô na última coluna, isto é, quando aparece uma linha daquele tipo.

Usado em: Exemplo 3.38 (Discussão de um sistema com parâmetro), Exemplo 3.37 (Um sistema resolvido por completo), Nota 3.33 (O que se lê na forma escada reduzida)

`thm-criterio`

Nota 3.33 (O que se lê na forma escada reduzida)

Requer: Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto), Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada)



A forma escada reduzida diz tudo de uma vez. As colunas com pivô dão as variáveis dependentes e contam o posto; as colunas sem pivô dão as variáveis livres e contam a dimensão do núcleo. A soma das duas é o número de colunas — que é o teorema do núcleo e da imagem (Corolário 3.24 (dim $N(A) = n - \text{posto}\, A$: a dimensão do conjunto solução)), agora visível a olho nu. E a última linha, no bloco de b, é o teste de compatibilidade (Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada)).

Veja também: Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida)

nota-leitura-da-forma-escada

Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas)

Requer: Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

A demonstração exige: Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto), Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução)

Para toda $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, a dimensão do espaço gerado pelas linhas é igual à dimensão do espaço gerado pelas colunas.

Demonstração

Seja R a forma escada reduzida de A, com p pivôs.

Pelas colunas: pela Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto), o posto-coluna de A é p.

Pelas linhas: pela Proposição 3.27 (Operações elementares não alteram o conjunto solução), A e R geram o mesmo espaço-linha. As linhas não nulas de R são exatamente p, e são LI: numa combinação linear nula delas, olhe a coluna do pivô da i-ésima linha — só ela contribui ali, logo o seu coeficiente é nulo. Portanto o posto-linha de A é p.

Os dois valem p.

Usado em: Corolário 3.35 (posto A = posto A^t e posto $A \leq \min\{m,n\}$)

Veja também: Corolário 5.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas, pelo dual)

thm-linhacoluna

Corolário 3.35 (posto A = posto A^t e posto $A \leq \min\{m,n\}$)

Requer: Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas)

posto A = posto A^t; e posto $A \leq \min\{m,n\}$.

cor-posto-limitado

Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento)

Requer: Definição 3.29 (Forma escada)

A demonstração exige: Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto), Nota 3.28 (Operações elementares como multiplicação por matrizes)

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível se e somente se a sua forma escada reduzida é I_n. Nesse caso, aplicando a $[\,A \mid I_n\,]$ as operações que levam A a I_n, obtém-se $[\,I_n \mid A^{-1}\,]$.

Demonstração

A é invertível $\iff$ T_A é isomorfismo (Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível)) $\iff$ $N(A) = \{0\}$ e posto $A = n$ $\iff$ há n pivôs numa matriz $n \times n$ $\iff$ a forma escada reduzida é I_n.

Para a segunda parte: se $E_k \cdots E_1 A = I$, então $E_k \cdots E_1 = A^{-1}$; e aplicar as mesmas operações a I produz $E_k \cdots E_1 I = A^{-1}$. Fazer as duas coisas ao mesmo tempo é justamente escalonar $[\,A \mid I\,]$.

Usado em: Motivação 4.1 (Um número que decide a invertibilidade), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível) (dem.)

prop-inversa

Exemplo 3.37 (Um sistema resolvido por completo)

Requer: Corolário 3.24 (dim $N(A) = n - \text{posto}\, A$: a dimensão do conjunto solução), Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada)

Um sistema resolvido por completo. Considere

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + y + z - w = 2 \\ 3x - 2y + z - 2w = 3. \end{cases}$$

Escalonando a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & -14 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -15 & 0 \end{array}\right].$$

São três pivôs: posto $A = 3$, e como $n = 4$, o núcleo tem dimensão 1. O sistema é compatível (nenhuma linha $0 = c$), e o conjunto solução é uma *reta afim* de $\mathbb{R}^4$.

Uma solução particular salta à vista, $X_0 = (1, 0, 0, 0)$. Para o núcleo, resolvemos o homogêneo de baixo para cima com $w = 8$:

$$-8z = 15w \Rightarrow z = -15, \qquad 3y = -5z - 9w = 75 - 72 = 3 \Rightarrow y = 1,$$

$$x = -2y - 3z - 4w = -2 + 45 - 32 = 11.$$

Logo $N(A) = [\,(11, 1, -15, 8)\,]$ e

$$\{X : AX = b\} = (1, 0, 0, 0) + t\,(11, 1, -15, 8), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Na figura do Corolário 3.24 (dim $N(A) = n - \text{posto}\, A$: a dimensão do conjunto solução): o ponto é X_0, a direção é $(11, 1, -15, 8)$, e a dimensão é $1 = 4 - 3$. Com $b = 0$, é o sistema do Exemplo 2.51 (Em $\mathbb{R}^n$, testar independência é resolver um sistema homogêneo).

Veja também: Exemplo 2.51 (Em $\mathbb{R}^n$, testar independência é resolver um sistema homogêneo)

`ex-sistema`

Exemplo 3.38 (Discussão de um sistema com parâmetro)

Requer: Teorema 3.32 (Critério de compatibilidade pela forma escada), Teorema 3.22 (O conjunto solução é $X_0 + N(A)$)

Uma discussão. Discutir, segundo $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ x + ay + 2z = a^2 - 2. \end{cases}$$

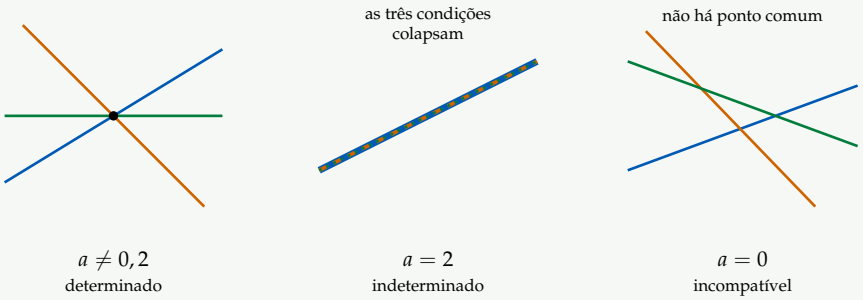
Subtraindo a primeira linha das outras duas e depois eliminando:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & a & 2 & a^2 - 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & a^2 - 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & 1 \\ 0 & 0 & -a(a-2) & (a-2)(a+1) \end{array}\right],$$

onde na última linha usamos $1-(a-1)^2 = -a(a-2)$ e $a^2-3-(a-1) = (a-2)(a+1)$. Agora a discussão é a leitura da última linha:

- $a \neq 0$ **e** $a \neq 2$**:** três pivôs, posto $A = 3 = n$. Sistema **compatível determinado**: solução única.
- $a = 0$**:** a última linha vira $(0\,0\,0 \mid -2)$. Sistema **incompatível**.
- $a = 2$**:** a última linha vira $(0\,0\,0 \mid 0)$. Dois pivôs, posto $A = 2$, dim $N(A) = 1$: sistema **compatível indeterminado**, com conjunto solução

$$(0,1,0) + t\,(0,-1,1), \qquad t \in \mathbb{R}.$$



As três possibilidades, desenhadas com retas no plano — é a versão em uma dimensão a menos do que acontece com os três planos de $\mathbb{R}^3$*. Um sistema linear nunca tem exatamente duas soluções: ou nenhuma, ou uma, ou infinitas. O Teorema 3.22 (O conjunto solução é* $X_0 + N(A)$*) é a razão — o conjunto solução, quando não é vazio, é um transladado de um subespaço.*

ex-param

Exemplo 3.39 (As duas descrições de um subespaço: geradores e equações)

Requer: Corolário 3.24 (dim $N(A) = n -$ posto A: a dimensão do conjunto solução)

As duas descrições de um subespaço. Um subespaço de $\mathbb{R}^n$ pode ser dado *por geradores* ou *por equações*, e escalonar é o que traduz uma descrição na outra.

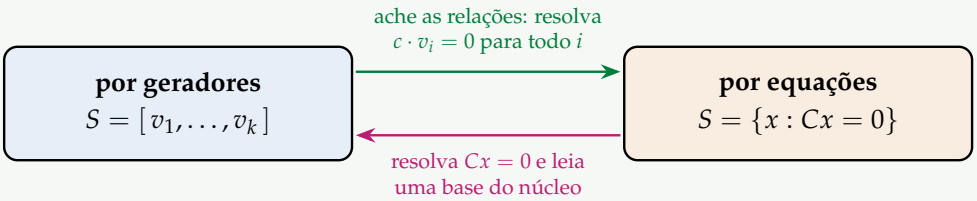
Tome $S = [\,(1,2,-1,0),\ (0,1,1,1)\,] \subset \mathbb{R}^4$. Para achar equações, procuramos os (c_1,c_2,c_3,c_4) que se anulam nos dois geradores:

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 + c_4 = 0. \end{cases}$$

Esse sistema tem posto 2 e portanto espaço solução de dimensão 2; tomando c_3, c_4 como livres, uma base é $(3,-1,1,0)$ e $(2,-1,0,1)$. Logo

$$S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - y + z = 0 \ \text{ e } \ 2x - y + w = 0\}.$$

Conferindo nos geradores: $3-2-1=0$ e $2-2+0=0$; $0-1+1=0$ e $0-1+1=0$. ✓



$k = \dim S$ #equações independentes $= n - \dim S$

Todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ tem duas descrições, e o escalonamento é o dicionário entre elas. Uma tem $\dim S$ *dados; a outra tem* $n - \dim S$*. Esse par de descrições tem nome próprio: as equações são o* anulador *de S (Definição 5.24 (Anulador)), e a soma das duas dimensões dar n não é coincidência.*

O caminho de volta fecha o círculo: a partir das duas equações, resolver o sistema recupera os dois geradores.

Veja também: Definição 5.24 (Anulador)

`ex-duas`

Demonstrar e refutar

Nota 3.40 (O teorema do núcleo e da imagem em quatro roupas)

Requer: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), Corolário 3.24 ($\dim N(A) = n - \text{posto } A$: a dimensão do conjunto solução), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)

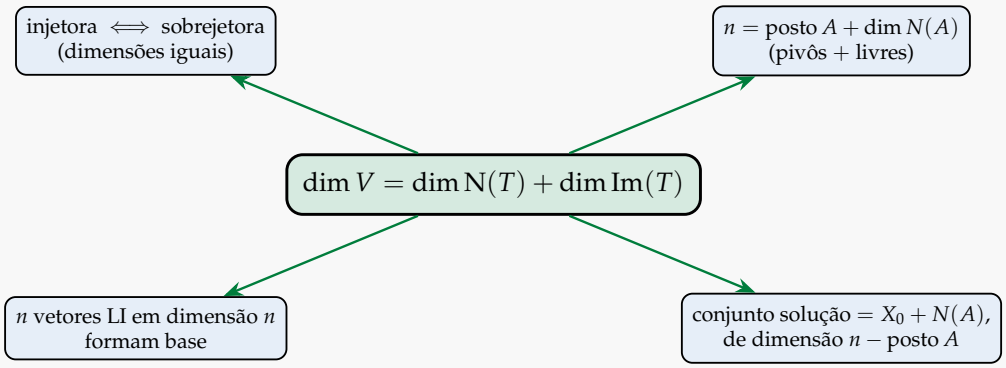
Um teorema, quatro roupas. O teorema do núcleo e da imagem aparece em quatro formas que parecem diferentes:

(1) $\dim V = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$ (Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)).

(2) Se $\dim V = \dim W$: injetora $\iff$ sobrejetora $\iff$ bijetora (Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)).

(3) $n = \text{posto } A + \dim N(A)$: número de colunas = pivôs + variáveis livres (Corolário 3.24 ($\dim N(A) = n - \text{posto } A$: a dimensão do conjunto solução), Proposição 3.31 (Os pivôs contam o posto)).

(4) n vetores LI em dimensão n já formam base (Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)) — que é (2) aplicado à transformação $\mathbb{R}^n \to V$ que manda $e_i \mapsto v_i$.

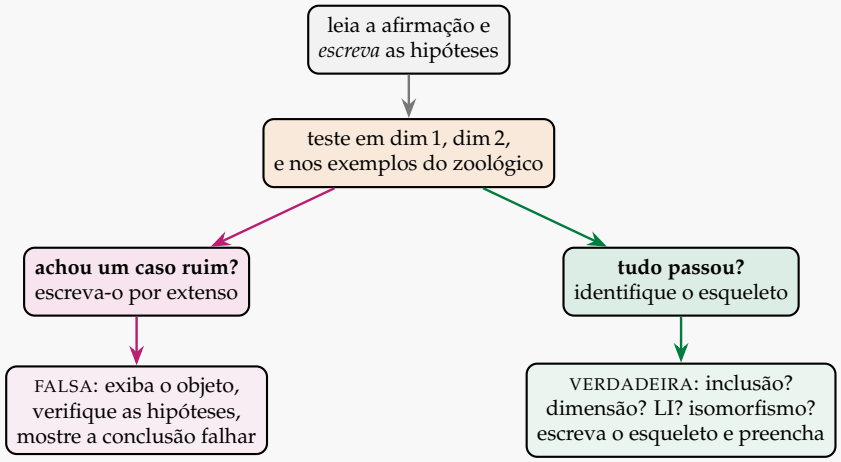


O mesmo teorema, quatro roupas: as caixas azuis são a caixa verde. Em cada uma, qual é a transformação linear escondida? Em "n vetores LI formam base" é $T : \mathbb{R}^n \to V$, $e_i \mapsto v_i$; em "sistemas" é T_A.

`nota-roupas`

Nota 3.41 (Verdadeiro ou falso: como decidir)

"Falso" sem contra-exemplo não vale nada; "verdadeiro" sem demonstração também não. Um contra-exemplo é um *objeto explícito*, com todos os dados. "Existe uma matriz que…" não é contra-exemplo; $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ é. E um contra-exemplo em dimensão 2 vale tanto quanto um em dimensão 17 — e é bem mais fácil de escrever. Procure sempre o menor.



o erro mais comum:
pular a caixa laranja
e "sentir" a resposta.

O procedimento, escrito. Ele parece burocrático, e é — de propósito. O passo mais pulado é o segundo: testar em exemplos pequenos *antes* de decidir (Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos)). Metade dos erros morre aí. Para as afirmações verdadeiras, veja a Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração).

Usado em: Exercício 3.45 (Toda base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ contém uma matriz invertível?) (dem.)

Veja também: Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos), Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração)

`nota-como-decidir-verdadeiro-ou-falso`

Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem), Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares), Exemplo 1.39 (A derivada é linear), Proposição 2.16 (Quando a união de dois subespaços é subespaço)

$N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	mata: $N \neq 0$ mas $N^2 = 0$; não invertível; $N(N) = \mathrm{Im}(N)$
$R_{90^\circ} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$	mata: nenhuma reta invariante; nenhum autovalor real
$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$	mata: base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ *sem nenhuma matriz invertível*
$(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ em $\mathbb{R}^2$	mata: dois a dois LI, mas o terno é LD
$D(p) = p'$ em P_n	mata: não injetora, não sobrejetora; nilpotente
eixos x e y em $\mathbb{R}^2$	mata: união de subespaços não é subespaço; complementar não é único

São seis objetos, e eles refutam a maioria das afirmações falsas sobre espaços vetoriais, bases, transformações lineares e matrizes. Toda vez que uma afirmação aparecer, a primeira coisa a fazer é testá-la nesta lista.
Para dualidade, quocientes, produto interno e formas multilineares, os contra-exemplos pequenos são quase sempre em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^4$: duas retas distintas no plano, a forma det em $\mathbb{R}^2$ (Exemplo 7.6 (A forma alternada $\det(x\ y)$ em $\mathbb{R}^2$)), a forma $e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$ em $\mathbb{R}^4$ (Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais)), e um produto interno que não é o usual (Exemplo 6.6 (Um produto interno em $\mathbb{R}^2$ que não é o usual)).

Usado em: Exercício 3.44 (Vetores dois a dois LI formam uma lista LI?) (dem.)

Veja também: Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real), Exemplo 1.62 (Núcleo e imagem da derivada), Nota 2.34 (Decomposição do plano em duas retas oblíquas), Nota 3.41 (Verdadeiro ou falso: como decidir), Exemplo 7.6 (A forma alternada $\det(x\ y)$ em $\mathbb{R}^2$), Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais), Exemplo 6.6 (Um produto interno em $\mathbb{R}^2$ que não é o usual)

`nota-zoologico-de-contraexemplos`

Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração)

Requer: Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

1. Inclusão de subespaços: $S_1 \subset S_2$
"Seja $v \in S_1$. Então … Logo $v \in S_2$."
Para $S_1 = S_2$: as duas inclusões — ou, se $S_1 \subset S_2$ e $\dim S_1 = \dim S_2$, a contagem de dimensões fecha de graça.

2. Uma dimensão: $\dim S = k$
Ou exiba uma base (k vetores, LI e geradores), ou escreva $S = \mathrm{N}(T)$ ou $S = \mathrm{Im}(T)$ e conte com o teorema do núcleo e da imagem.
O segundo caminho quase sempre é mais curto.

3. Independência linear
"Suponha $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$. … Logo $a_i = 0$."
Para LD: exiba *uma* combinação nula com algum coeficiente não nulo.

4. T é isomorfismo
Se $\dim V = \dim W < \infty$: basta *uma* das duas — injetora ou sobrejetora.
Injetora é quase sempre mais fácil: mostre $\mathrm{N}(T) = \{0\}$.

Os quatro esqueletos não são truques: são as estruturas lógicas mais comuns dos enunciados sobre subespaços, dimensão e transformações lineares. Identificar o esqueleto *antes* de começar a escrever é o que separa uma demonstração de meia página de uma de três.

No esqueleto 1, a contagem de dimensões é o Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço). No esqueleto 2, "exibir base" e "contar pelo teorema do núcleo e da imagem" (Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)) são duas estratégias, e a segunda dispensa achar os vetores; veja o Exemplo 2.97 (Dimensão das matrizes de traço nulo). O esqueleto 4 é o Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora).

Usado em: Exercício 4.32 ($AB = I$ implica $BA = I$?) (dem.)

Veja também: Exemplo 2.97 (Dimensão das matrizes de traço nulo), Nota 3.41 (Verdadeiro ou falso: como decidir)

`nota-quatro-esqueletos-de-demonstracao`

Exercício 3.44 (Vetores dois a dois LI formam uma lista LI?)

Requer: Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

A demonstração exige: Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos)

Verdadeiro ou falso? *Se $v_1, \ldots, v_n$ são dois a dois LI (isto é, (v_i, v_j) é LI sempre que $i \neq j$), então $(v_1, \ldots, v_n)$ é LI.*

Resolução

Falsa. Em $\mathbb{R}^2$, tome $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (1,1)$. Cada par é LI (nenhum dos três é múltiplo de outro), mas $v_1 + v_2 - v_3 = 0$: o terno é LD. É a quarta linha do Nota 3.42 (Um zoológico de contra-exemplos).

Veja também: Nota 2.32 (Soma direta de três ou mais subespaços)

`exerc-dois-a-dois-li`

Exercício 3.45 (Toda base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ contém uma matriz invertível?)

Requer: Definição 2.64 (Base)

A demonstração exige: Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares), Definição 3.23 (Posto de uma matriz), Nota 3.41 (Verdadeiro ou falso: como decidir)

Verdadeiro ou falso? *Toda base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ contém pelo menos uma matriz invertível.*

Resolução

Falsa. A base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ — a mais familiar de todas — é formada por quatro matrizes de posto 1, portanto nenhuma invertível.
A lição é a do procedimento da Nota 3.41 (Verdadeiro ou falso: como decidir): *teste nos exemplos que você já conhece antes de decidir*.

`exerc-base-sem-matriz-invertivel`

Exercício 3.46 (Existe $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)

Verdadeiro ou falso? *Existe $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ linear com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$.*

Resolução

Falsa. Se $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T) =: S$, o Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem) dá

$$5 = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 2 \dim S,$$

e 5 é ímpar. *Nenhum* T serve, e a razão é só a paridade.

exerc-nucleo-igual-a-imagem-em-r5

Exercício 3.47 (Existe $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$), Exemplo 2.70 (A base $(1, x, \ldots, x^n)$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$)

Verdadeiro ou falso? *Existe* $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ *linear com* $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

Resolução

Verdadeira. Agora $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$ é par, e o argumento de paridade do Exercício 3.46 (Existe $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?) não impede nada — mas não basta: é preciso *exibir* T. Defina-a na base $(1, x, x^2, x^3)$ por

$$T(1) = 0, \qquad T(x) = 0, \qquad T(x^2) = 1, \qquad T(x^3) = x,$$

o que é legítimo: uma transformação linear pode ser definida livremente numa base (Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \ldots, e_n$)). Então $\mathrm{Im}(T) = [\,1,\, x\,]$; e $\mathrm{N}(T) = [\,1,\, x\,]$, pois $T(a + bx + cx^2 + dx^3) = c + dx$ se anula exatamente quando $c = d = 0$. Logo $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$. Compare com o Exercício 3.46 (Existe $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?): mesma pergunta, respostas opostas, e a diferença é a paridade da dimensão. E "a conta de dimensão não proibiu" *não é* demonstração de existência — ainda é preciso construir o objeto.

Veja também: Exercício 3.46 (Existe $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ com $\mathrm{N}(T) = \mathrm{Im}(T)$?)

exerc-nucleo-igual-a-imagem-em-p3

Capítulo 4

Determinantes

Formas n-lineares alternadas

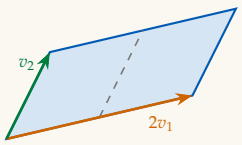
Motivação 4.1 (Um número que decide a invertibilidade)

Requer: Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento)

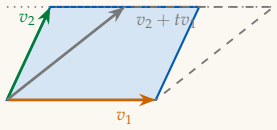
Para decidir se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é invertível, foi preciso escalonar (Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento)). Queremos um *número* $\det A$ que responda a isso de uma vez:

$$\det A \neq 0 \iff A \text{ invertível} \iff \text{as colunas de } A \text{ são LI.}$$

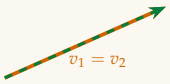
Em $\mathbb{R}^2$, um candidato natural já existe: a *área* do paralelogramo gerado pelas duas colunas. Ela se anula exatamente quando os dois vetores são colineares — isto é, LD. O determinante é essa ideia levada a sério em dimensão n.



(i) linear em cada coluna
$f(2v_1, v_2) = 2f(v_1, v_2)$



(ii) mesma base, mesma altura
$f(v_1, v_2 + tv_1) = f(v_1, v_2)$



(iii) paralelogramo degenerado
$f(v, v) = 0$

As três propriedades que vão definir *o determinante, vistas como propriedades da área orientada em* $\mathbb{R}^2$. *Nenhuma delas é uma escolha arbitrária: são exatamente os fatos que qualquer noção razoável de volume tem de satisfazer. O Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada) diz que, junto com* $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$, *elas determinam a função completamente.*

Veja também: Definição 4.2 (Formas n-lineares alternadas), Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível), Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal)

`mot-determinante`

Definição 4.2 (Formas n-lineares alternadas)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

Uma função $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ fatores}} \to \mathbb{R}$ é:

- **n-linear** quando é linear em cada variável, mantidas as outras fixas: para cada j,

$$f(\ldots, u + \lambda u', \ldots) = f(\ldots, u, \ldots) + \lambda f(\ldots, u', \ldots);$$

- **alternada** quando $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ sempre que $v_i = v_j$ para algum par $i \neq j$.

Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com colunas $C_1, \dots, C_n$, escrevemos $f(A) := f(C_1, \dots, C_n)$.

Usado em: Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas), Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada)

Veja também: Motivação 4.1 (Um número que decide a invertibilidade)

`def-alt`

Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)

Requer: Definição 4.2 (Formas n-lineares alternadas), Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

A demonstração exige: Proposição 2.46 (Uma lista é LD quando algum vetor é combinação dos demais)

Seja f uma forma n-linear alternada. Então:

(a) *trocar duas entradas troca o sinal de f;*

(b) *somar a uma entrada um múltiplo de outra não altera f;*

(c) *se $v_1, \dots, v_n$ são LD, então $f(v_1, \dots, v_n) = 0$.*

Na figura da Motivação 4.1 (Um número que decide a invertibilidade): (a) é "trocar a ordem inverte a orientação"; (b) é o cisalhamento; (c) é "achatou, volume zero".

Demonstração

(a) Fixe $i \neq j$ e considere a função de duas variáveis obtida congelando as demais. Pela propriedade alternada aplicada ao par $(u+v,\, u+v)$:

$$0 = f(\dots, u+v, \dots, u+v, \dots) = \underbrace{f(\dots, u, \dots, u, \dots)}_{=0} + f(\dots, u, \dots, v, \dots)$$

$$+ f(\dots, v, \dots, u, \dots) + \underbrace{f(\dots, v, \dots, v, \dots)}_{=0},$$

onde abrimos as duas entradas pela n-linearidade. Sobra $f(\dots, u, \dots, v, \dots) = -f(\dots, v, \dots, u, \dots)$.

(b) Pela n-linearidade na i-ésima entrada,

$$f(\dots, v_i + \lambda v_j, \dots, v_j, \dots) = f(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \lambda \underbrace{f(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots)}_{=0 \text{ (alternada)}}.$$

(c) Se os vetores são LD, algum deles é combinação dos outros, digamos $v_i = \sum_{j\neq i} c_j v_j$. Abrindo a i-ésima entrada pela n-linearidade,

$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{j\neq i} c_j\, f(\dots, \underbrace{v_j}_{\text{posição } i}, \dots, \underbrace{v_j}_{\text{posição } j}, \dots) = 0,$$

porque cada parcela tem duas entradas iguais.

Usado em: Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante) (dem.), Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz) (dem.), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível) (dem.), Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada) (dem.)

Veja também: Motivação 4.1 (Um número que decide a invertibilidade)

`prop-props`

Definição 4.4 (Permutações e sinal)

Uma **permutação** de $\{1,\dots,n\}$ é uma bijeção σ desse conjunto nele mesmo; o conjunto delas é denotado S_n e tem $n!$ elementos. Uma **transposição** troca dois elementos e fixa os demais. Admitimos dois fatos:

- toda $\sigma \in S_n$ é composição de transposições;
- a *paridade* do número de transposições usadas não depende da decomposição.

Isso permite definir o **sinal** $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$, onde k é o número de transposições em qualquer decomposição de σ. O sinal é multiplicativo: $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$.

Usado em: Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada)

`def-permutacoes-e-sinal`

Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada)

Requer: Definição 4.2 (Formas n-lineares alternadas), Definição 4.4 (Permutações e sinal)

A demonstração exige: Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)

Seja f uma forma n-linear alternada e seja $A = (a_{ij})$ com colunas $C_1,\dots,C_n$. Então

$$f(C_1,\dots,C_n) = \Big(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\Big)\cdot f(e_1,\dots,e_n).$$

Em particular, existe no máximo *uma forma n-linear alternada com $f(e_1,\dots,e_n) = 1$.*

Demonstração

Cada coluna é $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. Abrindo a primeira entrada pela n-linearidade, depois a segunda, e assim por diante, obtemos uma soma sobre todas as escolhas de índices $i_1,\dots,i_n \in \{1,\dots,n\}$:

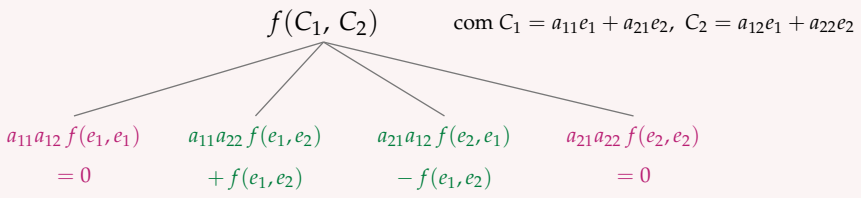
$$f(C_1,\dots,C_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\, f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n}).$$

São n^n parcelas. Mas f é alternada: se dois índices se repetem, o fator $f(e_{i_1},\dots,e_{i_n})$ é nulo. Sobrevivem apenas as escolhas *injetoras*, isto é, as permutações σ com $i_j = \sigma(j)$ — exatamente $n!$ parcelas.

Para cada uma delas, a Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)(a) permite reordenar $(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})$ até $(e_1,\dots,e_n)$ por transposições, cada uma custando um sinal -1. Se σ se decompõe em k transposições, o custo total é $(-1)^k = \operatorname{sgn}(\sigma)$:

$$f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, f(e_1,\dots,e_n).$$

Substituindo, sai a fórmula. A última afirmação é imediata: duas formas com o mesmo valor em $(e_1,\dots,e_n)$ coincidem.



$$f(C_1,C_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\, f(e_1,e_2)$$

$n^2 = 4$ parcelas; sobrevivem as $2! = 2$ injetoras

A demonstração para $n = 2$, escrita por extenso. Abrir as duas colunas produz n^n parcelas; a propriedade alternada mata todas as que repetem um índice, e sobram as $n!$ permutações. O sinal de cada uma é o preço de reordenar.

Usado em: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

`thm-unico`

Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

Requer: Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada)

A demonstração exige: Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)

A fórmula

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

define uma forma n-linear alternada nas colunas de A, com $\det I_n = 1$. Portanto: existe uma e uma só forma n-linear alternada valendo 1 na base canônica, e é o determinante.

Demonstração

n-linear: cada parcela contém exatamente um fator de cada coluna — o fator $a_{\sigma(j)j}$ vem da coluna j —, logo cada parcela é linear em cada coluna, e a soma também.

Alternada: suponha $C_k = C_\ell$ com $k \neq \ell$, isto é, $a_{ik} = a_{i\ell}$ para todo i. Seja τ a transposição que troca k e ℓ; a aplicação $\sigma \mapsto \sigma\tau$ é uma bijeção de S_n que troca o sinal. Reindexando o produto associado a $\sigma\tau$ pela substituição $j' = \tau(j)$,

$$\prod_j a_{\sigma\tau(j)\,j} = \prod_{j'} a_{\sigma(j')\,\tau(j')} = a_{\sigma(k)\ell}\, a_{\sigma(\ell)k} \prod_{j' \neq k,\ell} a_{\sigma(j')j'} = a_{\sigma(k)k}\, a_{\sigma(\ell)\ell} \prod_{j' \neq k,\ell} a_{\sigma(j')j'} = \prod_j a_{\sigma(j)j},$$

onde na terceira igualdade usamos $a_{ik} = a_{i\ell}$. Ou seja: σ e $\sigma\tau$ contribuem com o *mesmo* produto e com sinais *opostos*. As parcelas se cancelam duas a duas e a soma é zero.

Valor na identidade: em I_n, o produto $a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$ é nulo a menos que $\sigma = \mathrm{id}$, e para essa vale 1.

Outra demonstração da existência, sem permutações. Esta versão substitui a fórmula de Leibniz por uma definição recursiva, e com isso dispensa a discussão sobre sinal de permutação.

A construção. Defina $D_1([\,a\,]) := a$ e, para $n \geq 2$, defina recursivamente

$$D_n(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1}\, D_{n-1}(A_{i1}),$$

onde A_{i1} é a matriz obtida de A apagando a *linha i* e a *primeira coluna*. (É o desenvolvimento pela primeira coluna, usado agora como *definição*.)

Afirmação. *D_n é n-linear e alternada nas colunas, e $D_n(I_n) = 1$.* Pelo Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada), segue que D_n é a única forma com essas propriedades — isto é, $D_n = \det$, e a existência está provada.

Demonstração, por indução em n. Para $n = 1$ tudo é trivial. Suponha o resultado para $n - 1$.

(1) $D_n(I_n) = 1$. Na soma, $a_{i1} = 0$ para $i \geq 2$; sobra a parcela $i = 1$, que vale $1 \cdot D_{n-1}(I_{n-1}) = 1$ pela hipótese de indução.

(2) D_n é linear em cada coluna. Na coluna 1: o fator $D_{n-1}(A_{i1})$ não vê a primeira coluna, e o fator a_{i1} é linear nela; logo cada parcela é linear na coluna 1. Numa coluna $j \geq 2$: o fator a_{i1} não a vê, e A_{i1} contém essa coluna (sem a linha i), de modo que $D_{n-1}(A_{i1})$ é linear nela por hipótese de indução.

(3) $D_n(A) = 0$ quando duas colunas vizinhas *são iguais.* Sejam $C_j = C_{j+1}$.

Caso $j \geq 2$. Cada menor A_{i1} ainda tem essas duas colunas, agora vizinhas nas posições $j-1$ e j; por indução, $D_{n-1}(A_{i1}) = 0$ para todo i, e a soma é nula.

Caso $j = 1$, isto é, $C_1 = C_2$. Aqui os menores não têm colunas repetidas, e é preciso trabalhar. Expanda mais uma vez: a primeira coluna de A_{i1} é C_2 sem a linha i — que, por hipótese, é C_1 sem a linha i, de entradas a_{k1} com $k \neq i$. Aplicando a definição de D_{n-1} a A_{i1},

$$D_n(A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i} (-1)^{i+1}\,(-1)^{p(i,k)+1}\, a_{i1}\, a_{k1}\, D_{n-2}\big(A_{\{i,k\},\{1,2\}}\big),$$

onde $A_{\{i,k\},\{1,2\}}$ é A sem as linhas i, k e sem as colunas $1, 2$, e $p(i,k)$ é a *posição* da linha k dentro de A_{i1}, a saber

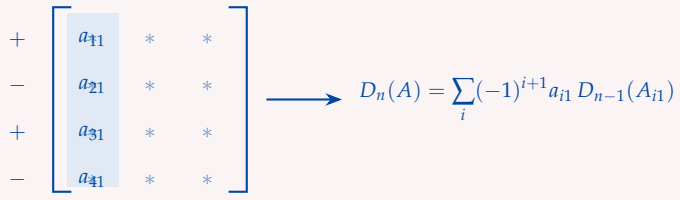
$$p(i,k) = k \ \text{ se } k < i, \qquad p(i,k) = k-1 \ \text{ se } k > i.$$

Agora compare as parcelas (i,k) e (k,i), com $i < k$. Elas têm o *mesmo* produto $a_{i1}a_{k1}$ e o *mesmo* menor $A_{\{i,k\},\{1,2\}}$. Quanto aos sinais:

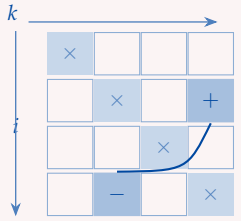
$$(i,k):\ (-1)^{i+1}(-1)^{(k-1)+1} = (-1)^{i+k-1}, \qquad (k,i):\ (-1)^{k+1}(-1)^{i+1} = (-1)^{i+k}.$$

São opostos. Logo as parcelas se cancelam duas a duas, e $D_n(A) = 0$.

(4) De vizinhas para quaisquer. De (2) e (3) segue, pelo mesmo cálculo da Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)(a) aplicado a duas colunas *vizinhas*, que trocar duas colunas vizinhas troca o sinal de D_n. Se agora $C_i = C_j$ com $i < j$, empurre a coluna j para a esquerda por trocas de vizinhas sucessivas, até ela ficar ao lado da coluna i: cada troca multiplica D_n por -1, e a matriz final tem duas colunas vizinhas iguais, logo D_n nela é 0 por (3). Portanto $D_n(A) = \pm 0 = 0$.



(a) a definição recursiva: primeira coluna vezes menores



(b) as parcelas se cancelam aos pares

*A construção alternativa. Em **(a)**, a definição recursiva: o determinante de ordem n é a primeira coluna contra os menores de ordem $n-1$, com sinais alternados. Em **(b)**, o passo delicado — quando as duas primeiras colunas coincidem, expandir duas vezes produz um termo para cada par ordenado (i,k) com $i \neq k$, e os dois termos de cada par têm o mesmo produto e sinais opostos. O quadro inteiro se cancela.*

Esta construção já entrega o desenvolvimento de Laplace *pela primeira coluna* — que é literalmente a definição de D_n. O Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace) o estende a uma linha ou coluna qualquer.

Usado em: Corolário 4.27 (Regra de Cramer), Definição 4.18 (Menor e cofator), Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais), Exemplo 4.7 (O determinante 2×2), Exemplo 4.8 (O determinante 3×3: regra de Sarrus), Exercício 4.33 ($A^2 = A$ e $A \neq I$ implicam $\det A = 0$?), Lema 4.19 (Determinante com 1 no canto), Motivação 7.1 (Funções de vários vetores, lineares em cada um), Nota 4.9 (A fórmula de Leibniz não serve para calcular), Nota 4.17 (A unicidade do determinante é uma ferramenta), Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal), Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos), Proposição 6.32 (Determinante de Gram), Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante), Proposição 4.12 (Determinante de uma matriz triangular), Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$), Teorema 4.11 ($\det A \neq 0$ equivale a A invertível), Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$)

Veja também: Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace)

`thm-formula-do-determinante`

Exemplo 4.7 (O determinante 2×2)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

$n = 2$: $S_2 = \{\mathrm{id},\ \tau\}$ com $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$, logo

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Usado em: Exemplo 7.6 (A forma alternada $\det(x\ y)$ em $\mathbb{R}^2$)

`ex-23-a`

Exemplo 4.8 (O determinante 3×3: regra de Sarrus)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

$n = 3$: S_3 tem 6 elementos, três pares e três ímpares, e sai a regra de Sarrus

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

`ex-23-b`

Nota 4.9 (A fórmula de Leibniz não serve para calcular)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

Para $n = 4$ a fórmula de Leibniz (Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)) já tem 24 parcelas, e para $n = 10$ são 3 628 800. Ela é boa para *demonstrar*, e péssima para *calcular*. Calcula-se escalonando até uma matriz triangular (Proposição 4.12 (Determinante de uma matriz triangular)).

Veja também: Proposição 4.12 (Determinante de uma matriz triangular), Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace)

`nota-leibniz-nao-serve-para-calcular`

Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz), Definição 3.26 (Operações elementares)

A demonstração exige: Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)

As operações elementares sobre as colunas afetam o determinante assim:

(I) *trocar duas colunas multiplica* det *por* -1*;*

(II) *multiplicar uma coluna por* λ *multiplica* det *por* λ*;*

(III) *somar a uma coluna um múltiplo de outra não altera* det.

Demonstração

São, na ordem, a Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)(a), a n-linearidade e a Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)(b).

Usado em: Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas), Lema 4.19 (Determinante com 1 no canto) (dem.), Teorema 4.13 (det A^t = det A) (dem.), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível) (dem.)

prop-opcol

Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz), Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

A demonstração exige: Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas), Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante), Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento)

Para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ são equivalentes: (i) $\det A \neq 0$; (ii) as colunas de A são LI; (iii) A é invertível.

Demonstração

(ii) $\iff$ (iii) segue da Proposição 3.36 (Inversa por escalonamento). Se as colunas são LD, a Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)(c) dá $\det A = 0$; isso é (i)$\Rightarrow$(ii) na forma contrapositiva.

Falta (ii)$\Rightarrow$(i). Se as colunas são LI, elas formam base de $\mathbb{R}^n$; escalonando *por colunas* — usando apenas as operações (I), (II) e (III) — podemos levar A a I_n. Cada operação multiplica o determinante por um escalar não nulo (-1, $\lambda \neq 0$ ou 1), e ao fim obtemos $\det I_n = 1 \neq 0$. Logo $\det A \neq 0$.

Usado em: Exemplo 4.29 (Vandermonde e interpolação), Nota 4.16 (Em $\mathbb{R}^3$: volume nulo equivale a vetores coplanares), Exercício 4.32 ($AB = I$ implica $BA = I$?) (dem.), Exercício 7.16 (Em dimensão ímpar, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v,\cdot) = 0$?) (dem.), Exercício 4.33 ($A^2 = A$ e $A \neq I$ implicam $\det A = 0$?) (dem.), Proposição 6.32 (Determinante de Gram) (dem.), Proposição 4.24 (T é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$) (dem.), Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante) (dem.), Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$) (dem.), Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo) (dem.)

thm-invertivel

Proposição 4.12 (Determinante de uma matriz triangular)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

Se A é triangular (superior ou inferior), então $\det A$ *é o produto das entradas diagonais.*

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix} \xrightarrow[\times(-1)]{C_1 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&3\\3&2&5\end{pmatrix} \xrightarrow[\times 1]{C_3 - 2C_1} \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-1\\3&2&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\times 1]{C_3 + C_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix} = (-1)\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix} = -1$$

Como se calcula um determinante na prática: escalone (por colunas ou por linhas), anotando o fator que cada operação introduz, até chegar a uma triangular — onde a resposta é o produto da diagonal. Para $n = 3$ isso empata com Sarrus; para $n = 5$ já não há competição.

Demonstração

Na fórmula de Leibniz, considere uma parcela não nula. Para A triangular superior, $a_{ij} = 0$ quando $i > j$, logo é preciso $\sigma(j) \leq j$ para todo j. Aplicando isso a $j = 1$ vem $\sigma(1) = 1$; a $j = 2$, $\sigma(2) \in \{1, 2\}$ e, sendo injetora, $\sigma(2) = 2$; e assim por diante. Só sobra $\sigma = \mathrm{id}$, cuja parcela é $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Usado em: Exemplo 8.20 (Dois operadores que derivam: D e $x\,D$), Corolário 8.55 (Traço e determinante: soma e produto das raízes de p_T) (dem.)

Veja também: Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante), Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas)

`prop-triang`

Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

A demonstração exige: Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante), Teorema 4.11 ($\det A \neq 0$ equivale a A invertível), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)

$$\det A^t = \det A.$$

Demonstração

Por definição, $\det A^t = \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, pois a entrada (i,j) de A^t é a_{ji}. Em cada parcela, reordene os fatores pelo primeiro índice: pondo $\tau = \sigma^{-1}$,

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n}.$$

Como $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ e $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ é uma bijeção de S_n, a soma é exatamente $\det A$.

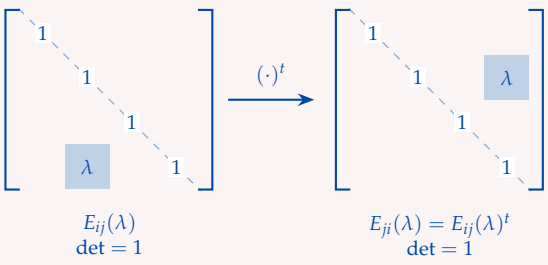
Outra demonstração, sem permutações. Esta demonstração usa a multiplicatividade $\det(AB) = \det A \det B$ (Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$)), cuja demonstração é uma aplicação direta da unicidade e não usa a transposta.

Uma armadilha, primeiro. A tentação é pôr $d(A) := \det A^t$, observar que d é n-linear alternada com $d(I) = 1$, e invocar a unicidade. Mas d é n-linear alternada nas *linhas* de A, ao passo que o Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada) é um enunciado sobre *colunas*. Unicidade nas colunas e unicidade nas linhas são dois teoremas distintos, e identificar as duas funções é precisamente o que se quer provar aqui: o argumento é circular.

Matrizes elementares. Para $i \neq j$ e $\lambda \neq 0$, sejam P_{ij} a identidade com as colunas i e j trocadas, $D_j(\lambda)$ a identidade com a entrada (j,j) substituída por λ, e $E_{ij}(\lambda) = I + \lambda\, \varepsilon_{ij}$, onde ε_{ij} tem 1 na posição (i,j) e 0 nas demais. Multiplicar A à direita por elas é executar as três operações da Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante): AP_{ij} troca as colunas i e j; $AD_j(\lambda)$ multiplica a coluna j por λ; e $AE_{ij}(\lambda)$ soma λ vezes a coluna i à coluna j.

Lema A. $\det P_{ij} = -1$, $\det D_j(\lambda) = \lambda$ *e* $\det E_{ij}(\lambda) = 1$. Cada uma delas se obtém de I por uma única operação de coluna; aplique a Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante) a $\det I = 1$.

Lema B. *A transposta de uma elementar é elementar do mesmo tipo, com o mesmo determinante.* As matrizes P_{ij} e $D_j(\lambda)$ são simétricas, e nada há a verificar. Já $E_{ij}(\lambda)^t = I + \lambda\, \varepsilon_{ji} = E_{ji}(\lambda)$, que pelo Lema A tem determinante $1 = \det E_{ij}(\lambda)$ (veja a figura).



A única matriz elementar não simétrica. Transpor reflete o λ pela diagonal e devolve outra elementar do mesmo tipo, com o mesmo determinante. As outras duas, P_{ij} e $D_j(\lambda)$, já são simétricas.

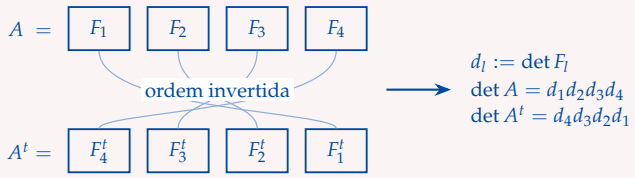
Lema C. *Toda matriz invertível é produto de elementares.* Na demonstração do Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível) levamos A a I por operações de coluna, isto é, $AF_1F_2\cdots F_k = I$ com cada F_l elementar. Logo $A = F_k^{-1}\cdots F_1^{-1}$, e as inversas de elementares são elementares: $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$, $D_j(\lambda)^{-1} = D_j(1/\lambda)$ e $E_{ij}(\lambda)^{-1} = E_{ij}(-\lambda)$.

Conclusão. Dois casos.

Caso 1: A invertível. Pelo Lema C, $A = F_1F_2\cdots F_k$ com todas as F_l elementares. Como $(XY)^t = Y^tX^t$ — verificação direta nas entradas, sem determinante nenhum —, vem $A^t = F_k^t\cdots F_1^t$. Pela multiplicatividade e pelo Lema B,

$$\det A^t = \det F_k^t \cdots \det F_1^t = \det F_k \cdots \det F_1 = \det F_1 \cdots \det F_k = \det A,$$

onde a terceira igualdade é só a comutatividade do produto em $\mathbb{R}$: os dois lados são a mesma lista de números reais, escrita em ordens diferentes (veja a figura).



Transpor um produto inverte a ordem dos fatores. Como o determinante é multiplicativo, $\det A$ *e* $\det A^t$ *são o mesmo produto de números reais escrito ao contrário — e o produto em* $\mathbb{R}$ *não depende da ordem.*

Caso 2: A não invertível. Então A^t também não é. De fato, se B fosse inversa de A^t, de $BA^t = I$ sairia $(BA^t)^t = AB^t = I$; logo A seria sobrejetora e, pelo Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), bijetora — contra a hipótese. Pelo Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível), $\det A = 0 = \det A^t$.

Efeito colateral útil. O Lema C é a ferramenta padrão para transferir para as linhas qualquer propriedade já provada para as colunas; o Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas) sai dele sem mudança alguma.

Usado em: Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas), Exercício 7.16 (Em dimensão ímpar, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v,\cdot) = 0$?) (dem.), Proposição 6.32 (Determinante de Gram) (dem.), Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais) (dem.), Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo) (dem.)

Veja também: Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$), Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas)

`thm-determinante-da-transposta`

Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas)

Requer: Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$), Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante)

Tudo o que foi dito sobre colunas vale para linhas. Em particular, o determinante é forma n-linear alternada nas *linhas*, as operações elementares de linha afetam det como na Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante), e $\det A = 0$ se e somente se as linhas são LD.

É este corolário que autoriza escalonar por linhas (Teorema 3.30 (Toda matriz tem uma forma escada reduzida)) para calcular determinantes.

Usado em: Proposição 7.11 (O produto exterior é alternado e detecta dependência linear) (dem.), Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace) (dem.), Teorema 4.26 ($A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A)\, I$) (dem.)

`cor-linhas`

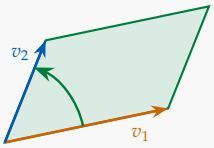
Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

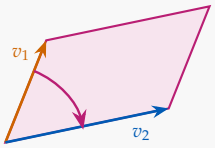
O determinante é volume com sinal. Em $\mathbb{R}^2$, seja $\mathcal{A}(v_1, v_2)$ a área do paralelogramo gerado por v_1 e v_2, tomada com sinal positivo quando o giro de v_1 para v_2 é anti-horário. Essa função é bilinear, alternada, e vale 1 em (e_1, e_2) — as três propriedades da figura da Motivação 4.1 (Um número que decide a invertibilidade). Pelo Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada), ela *é* o determinante:

$$\det(v_1\ v_2) = \pm \text{área do paralelogramo.}$$

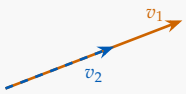
O mesmo argumento em $\mathbb{R}^3$ dá o volume do paralelepípedo, e em $\mathbb{R}^n$ serve como *definição* de volume n-dimensional. O sinal é a **orientação**: positivo quando a base $(v_1, \ldots, v_n)$ "gira no mesmo sentido" que a canônica.



$\det > 0$
giro anti-horário



$\det < 0$
giro horário



$\det = 0$
colineares

O sinal do determinante é a orientação. Trocar as duas colunas inverte o sentido do giro e o sinal — que é a Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)(a) vista com os olhos. E o determinante se anula exatamente quando o paralelogramo achata, isto é, quando as colunas são LD (Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível)).

Usado em: Nota 4.16 (Em $\mathbb{R}^3$: volume nulo equivale a vetores coplanares)

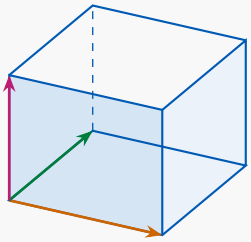
Veja também: Motivação 4.1 (Um número que decide a invertibilidade), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível)

`nota-volume`

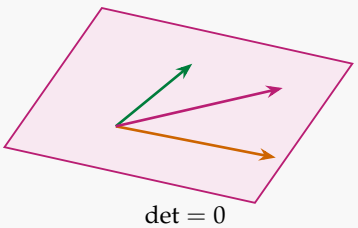
Nota 4.16 (Em $\mathbb{R}^3$: volume nulo equivale a vetores coplanares)

Requer: Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível)

Em $\mathbb{R}^3$, a leitura é a mesma: três vetores dão um paralelepípedo de volume $|\det|$, e esse volume é zero exatamente quando os três são coplanares — isto é, LD. É a versão geométrica do Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível).



$\det \neq 0$
volume positivo
colunas LI



$\det = 0$
os três no mesmo plano
colunas LD

Em $\mathbb{R}^3$: à esquerda, três vetores em posição geral geram um paralelepípedo genuíno; à direita, três vetores coplanares geram um sólido achatado, de volume nulo. "$\det A = 0$" e "as colunas de A são LD" são a mesma frase, uma dita em álgebra e a outra em geometria.

`nota-ld`

Laplace, multiplicatividade e aplicações

Nota 4.17 (A unicidade do determinante é uma ferramenta)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

A unicidade (Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada)) é a ferramenta, e não apenas um fato: toda vez que construirmos uma forma n-linear alternada, ela será automaticamente um múltiplo do determinante. A demonstração do Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$) é o modelo: não se calcula nada; constrói-se uma forma n-linear alternada e deixa-se a unicidade fazer o trabalho.

Veja também: Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$), Corolário 7.13 ($\dim \mathrm{Alt}^n(V) = 1$: toda forma de grau máximo é múltiplo do determinante), Teorema 7.20 (T age em $\mathrm{Alt}^n(V)$ multiplicando por $\det T$)

`nota-unicidade-como-ferramenta`

Definição 4.18 (Menor e cofator)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. O **menor** $A_{ij} \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ é a matriz obtida de A apagando a linha i e a coluna j. O **cofator** correspondente é

$$\mathrm{cof}_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Usado em: Definição 4.25 (Matriz adjunta), Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace)

`def-menor`

Lema 4.19 (Determinante com 1 no canto)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

A demonstração exige: Proposição 4.10 (Operações de coluna e o determinante)

Se $M \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, então

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b^t \\ 0 & M \end{pmatrix} = \det M.$$

Demonstração

Somando à j-ésima coluna o múltiplo adequado da primeira (que é e_1), zeramos b sem alterar o determinante. Ficamos com a matriz que tem 1 no canto, zeros na primeira linha e na primeira coluna, e M no resto. Na fórmula de Leibniz dessa matriz, uma parcela não nula exige $\sigma(1) = 1$; as demais escolhas formam exatamente as permutações do bloco M, com o mesmo sinal. Logo o determinante é $\det M$.

Usado em: Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace) (dem.)

`lem-canto`

Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace)

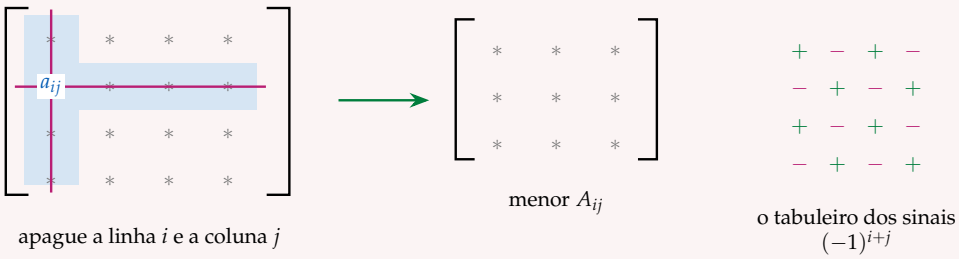
Requer: Definição 4.18 (Menor e cofator)

A demonstração exige: Lema 4.19 (Determinante com 1 no canto), Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas)

(Desenvolvimento de Laplace.) Para toda $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e todo j fixado,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, \det A_{ij} \qquad \text{(desenvolvimento pela coluna } j\text{)},$$

e, analogamente, pela linha i (usando $\det A^t = \det A$).



Laplace em uma imagem: para cada entrada de uma linha (ou coluna), apague a linha e a coluna dela, calcule o determinante do que sobra, e some com o sinal do tabuleiro. O tabuleiro não é convenção: o sinal $(-1)^{i+j}$ é o preço de levar a entrada a_{ij} até o canto por trocas de linhas e colunas vizinhas.

Na prática: *escolha sempre a linha ou coluna com mais zeros.*

Demonstração

Escreva $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ e abra a j-ésima entrada pela n-linearidade:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \det\big(C_1, \ldots, \underbrace{e_i}_{\text{posição } j}, \ldots, C_n\big).$$

Fixe i e chame D a matriz dessa parcela. Leve a coluna j até a primeira posição por $j-1$ trocas de colunas vizinhas, e depois a linha i até a primeira posição por $i-1$ trocas de linhas vizinhas. Cada troca custa um sinal -1, e o total é $(-1)^{(j-1)+(i-1)} = (-1)^{i+j}$. A matriz resultante tem 1 no canto superior esquerdo e zeros no resto da primeira coluna, e o bloco restante é exatamente A_{ij}; pelo Lema 4.19 (Determinante com 1 no canto), o seu determinante é $\det A_{ij}$. Logo $\det D = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Usado em: Exemplo 8.13 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 3×3), Exemplo 4.29 (Vandermonde e interpolação), Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial), Corolário 4.27 (Regra de Cramer) (dem.), Teorema 4.26 ($A \cdot \mathrm{adj}\, A = (\det A)\, I$) (dem.)

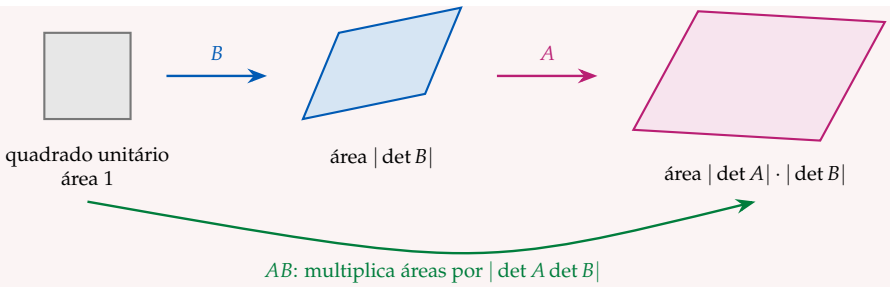
`thm-laplace`

Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

Para todas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$



Por que $\det(AB) = \det A \det B$. *Um determinante é o fator pelo qual a transformação multiplica volumes; compor duas transformações multiplica os dois fatores. O teorema é essa frase (Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal)), demonstrada sem falar em volume.*

Demonstração

Fixe A e considere a função das colunas de B

$$g(B_1, \ldots, B_n) := \det(AB).$$

A j-ésima coluna de AB é $A\,B_j$. Portanto:

- g é n-linear, porque $B_j \mapsto AB_j$ é linear e det é n-linear;
- g é alternada, porque se $B_i = B_j$ então $AB_i = AB_j$, e det é alternada.

Pelo Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada),

$$g(B_1, \ldots, B_n) = \det(B) \cdot g(e_1, \ldots, e_n) = \det B \cdot \det(A\,I) = \det B \cdot \det A.$$

Usado em: Corolário 4.22 (Determinante da inversa e de uma conjugada), Exercício 4.32 ($AB = I$ implica $BA = I$?) (dem.), Exercício 4.33 ($A^2 = A$ e $A \neq I$ implicam $\det A = 0$?) (dem.), Proposição 6.32 (Determinante de Gram) (dem.), Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais) (dem.), Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo) (dem.)

Veja também: Nota 4.17 (A unicidade do determinante é uma ferramenta), Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal)

`thm-mult`

Corolário 4.22 (Determinante da inversa e de uma conjugada)

Requer: Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$)

Se A é invertível, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. E para toda P invertível, $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

Demonstração

De $AA^{-1} = I$ vem $\det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$. E $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$, pois os dois fatores em P se cancelam — note que eles são *números*, e portanto comutam.

Usado em: Definição 4.23 (Determinante de um operador)

`cor-determinante-da-inversa`

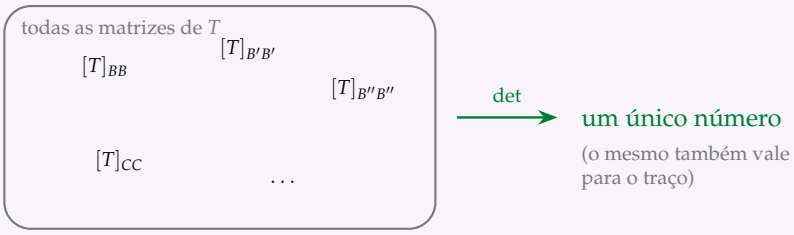
Definição 4.23 (Determinante de um operador)

Requer: Corolário 4.22 (Determinante da inversa e de uma conjugada), Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$)

Seja V de dimensão finita e $T : V \to V$ linear. O **determinante de** T é

$$\det T := \det [T]_{BB},$$

para qualquer base B de V. Pelo Corolário 4.22 (Determinante da inversa e de uma conjugada) e pelo Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$) ($[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$), esse número não depende da base escolhida.



O determinante é constante na classe de semelhança (Definição 3.15 (Matrizes semelhantes)): todas as matrizes de um mesmo operador, em todas as bases, têm o mesmo determinante. É isso que autoriza escrever det T *sem mencionar base — e é o primeiro* invariante *de um operador que encontramos.*

Usado em: Definição 8.10 (Polinômio característico), Exemplo 4.31 (O determinante da multiplicação à esquerda), Exemplo 4.30 (O determinante da transposição), Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$), Proposição 4.24 (T é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$), Teorema 7.20 (T age em $\mathrm{Alt}^n(V)$ multiplicando por $\det T$)

Veja também: Definição 3.15 (Matrizes semelhantes)

`def-detop`

Proposição 4.24 (T é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$)

Requer: Definição 4.23 (Determinante de um operador), Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível), Teorema 4.11 ($\det A \neq 0$ equivale a A invertível)

$T : V \to V$ é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$.

Demonstração

T é isomorfismo $\iff$ $[T]_{BB}$ é invertível (Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível)) $\iff$ $\det [T]_{BB} \neq 0$ (Teorema 4.11 ($\det A \neq 0$ equivale a A invertível)).

Usado em: Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$) (dem.)

`prop-isodet`

Definição 4.25 (Matriz adjunta)

Requer: Definição 4.18 (Menor e cofator)

A **matriz adjunta** de A é a transposta da matriz dos cofatores:

$$\left(\operatorname{adj} A\right)_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

Usado em: Teorema 4.26 ($A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A)\, I$)

`def-adj`

Teorema 4.26 ($A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A)\, I$)

Requer: Definição 4.25 (Matriz adjunta)

A demonstração exige: Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace), Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas)

Para toda $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$A \cdot \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A \cdot A = (\det A)\, I_n.$$

Em particular, se $\det A \neq 0$ *então* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.

Demonstração

A entrada (i,k) do produto $A \cdot \operatorname{adj} A$ é

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

Se $i = k$, isso é exatamente o desenvolvimento de Laplace de $\det A$ pela linha i (Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace)), logo vale $\det A$.

Se $i \neq k$, considere a matriz $\widetilde{A}$ obtida de A substituindo a linha k pela linha i. Ela tem duas linhas iguais, logo $\det \widetilde{A} = 0$. Mas o menor $\widetilde{A}_{kj}$ não vê a linha k, e portanto $\widetilde{A}_{kj} = A_{kj}$; assim o desenvolvimento de $\det \widetilde{A}$ pela linha k é precisamente a soma acima. Ela vale 0.

Logo $A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A) I$; o outro produto é análogo, desenvolvendo por colunas.

Usado em: Corolário 4.27 (Regra de Cramer) (dem.)

`thm-matriz-adjunta`

Corolário 4.27 (Regra de Cramer)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz), Definição 3.19 (Sistema linear)

A demonstração exige: Teorema 4.26 ($A \cdot \operatorname{adj} A = (\det A)\, I$), Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace)

(Regra de Cramer.) Se $\det A \neq 0$, *a única solução de* $AX = b$ *é dada por*

$$x_j = \frac{\det A^{(j)}}{\det A},$$

onde $A^{(j)}$ *é a matriz* A *com a* j*-ésima coluna substituída por* b.

Para $n = 2$ ou 3 a regra é útil; para $n = 5$ é muito mais lenta que escalonar. O valor dela é *teórico*: ela exibe a solução como função *racional* dos coeficientes, o que é usado, por exemplo, para mostrar que a solução depende continuamente dos dados.

Demonstração

$X = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)\, b$, cuja j-ésima entrada é $\frac{1}{\det A}\sum_i (-1)^{i+j} \det(A_{ij})\, b_i$. Essa soma é o desenvolvimento de Laplace, pela coluna j, do determinante da matriz que tem b na coluna j e as demais colunas de A — isto é, $\det A^{(j)}$.

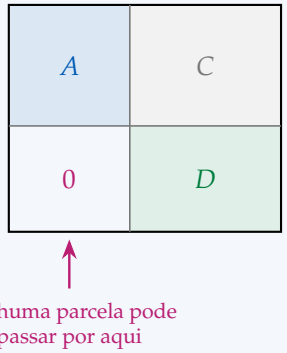
`cor-cramer`

Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

Se $A \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{q\times q}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$, então

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$$



logo cada permutação que sobrevive se parte em duas:
uma de $\{1,\dots,p\}$ e
uma de $\{p+1,\dots,n\}$

$\det M = \det A \cdot \det D$

O bloco de zeros força toda parcela não nula da fórmula de Leibniz a respeitar a divisão: as primeiras p colunas só podem usar as primeiras p linhas. Isso parte a soma em duas somas independentes — e é a razão de o determinante de uma matriz triangular por blocos ser o produto dos determinantes dos blocos.

Demonstração

Chame M a matriz em blocos, de tamanho $n = p + q$. Numa parcela não nula da fórmula de Leibniz, precisamos de $m_{\sigma(j)j} \neq 0$ para todo j. Para $j \leq p$, as entradas com $\sigma(j) > p$ estão no bloco nulo; logo $\sigma(\{1,\dots,p\}) \subset \{1,\dots,p\}$ e, por injetividade, σ restrita a $\{1,\dots,p\}$ é uma permutação desse conjunto — e o que sobra é uma permutação de $\{p+1,\dots,n\}$. Os sinais se multiplicam, e a soma se fatora no produto das duas somas de Leibniz.

Usado em: Exemplo 4.31 (O determinante da multiplicação à esquerda), Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T) (dem.), Proposição 8.27 ($1 \leq \text{mg} \leq \text{ma}$) (dem.)

`prop-determinante-por-blocos`

Exemplo 4.29 (Vandermonde e interpolação)

Requer: Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível), Corolário 3.10 (T é isomorfismo se e somente se a sua matriz é invertível)

Vandermonde e interpolação. Sejam $t_0, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ dois a dois distintos e

$$V = \begin{pmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^n \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^n \end{pmatrix}.$$

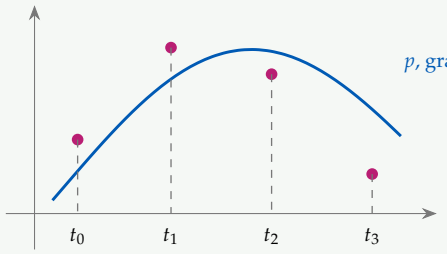
Vale

$$\det V = \prod_{0\leq i<j\leq n} (t_j - t_i) \neq 0.$$

Por que. Pense em $\det V$ como polinômio na variável t_n, com os demais fixos: ele tem grau $\leq n$ e se anula em $t_n = t_0, \dots, t_{n-1}$ (duas linhas iguais), logo é múltiplo de

$(t_n - t_0)\cdots(t_n - t_{n-1})$. Comparando o coeficiente de t_n^n (que é, por Laplace na última linha, o determinante de Vandermonde de ordem n) e iterando, sai a fórmula.

Para que serve. Considere $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $T(p) = (p(t_0), \ldots, p(t_n))$. Nas bases $(1, x, \ldots, x^n)$ e canônica, $[T] = V$. Como $\det V \neq 0$, T é *isomorfismo*: dados quaisquer valores $y_0, \ldots, y_n$, existe um e um só polinômio de grau $\leq n$ com $p(t_i) = y_i$. É o teorema da interpolação, obtido de um determinante.



p, grau ≤ 3 $T(p) = (p(t_0), \ldots, p(t_n))$
$\det V \neq 0 \Rightarrow T$ isomorfismo
quatro alturas quaisquer, um único polinômio

O determinante de Vandermonde não é uma curiosidade: ele é a afirmação de que a avaliação em $n+1$ pontos distintos é um isomorfismo $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$. Escolhidas as alturas nos pontos, o polinômio existe e é único — e a razão é que um determinante não se anula.

Veja também: Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear)

`ex-vander`

Exemplo 4.30 (O determinante da transposição)

Requer: Definição 4.23 (Determinante de um operador), Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares), Exemplo 1.42 (Transposição e multiplicação à esquerda)

O determinante da transposição. Seja $\Theta : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\Theta(A) = A^t$. Na base das matrizes elementares, $\Theta(E_{ij}) = E_{ji}$: ela *permuta* a base, fixando as n matrizes E_{ii} e trocando aos pares as $\frac{n(n-1)}{2}$ matrizes E_{ij} com $i < j$. A matriz de Θ é portanto uma matriz de permutação, cujo determinante é o sinal da permutação. Como ela é um produto de $\frac{n(n-1)}{2}$ transposições disjuntas,

$$\det \Theta = (-1)^{n(n-1)/2}.$$

`ex-transposicao-determinante`

Exemplo 4.31 (O determinante da multiplicação à esquerda)

Requer: Definição 4.23 (Determinante de um operador), Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos), Exemplo 2.71 (A base das matrizes elementares), Exemplo 1.42 (Transposição e multiplicação à esquerda)

Multiplicação à esquerda. Fixe $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e seja $L_M(A) = MA$. Como a k-ésima coluna de MA é M vezes a k-ésima coluna de A, o operador L_M age em cada coluna *separadamente*. Ordenando a base $\{E_{ij}\}$ coluna a coluna, a matriz de L_M é diagonal por blocos, com n cópias de M; pela Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos),

$$\det L_M = (\det M)^n.$$

Aqui, como no Exemplo 4.30 (O determinante da transposição), o determinante de um operador é calculado sem que se escreva a matriz inteira. O truque nos dois casos é o mesmo: escolher a base certa e reconhecer a estrutura.

ex-esq

Exercício 4.32 ($AB = I$ implica $BA = I$?)

A demonstração exige: Teorema 4.21 (det$(AB) =$ det $A \cdot$ det B), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível), Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração)

Verdadeiro ou falso? *Se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *e* $AB = I$, *então* $BA = I$.

Resolução

Verdadeira. De $AB = I$ vem $\det A \cdot \det B = 1$, logo $\det B \neq 0$ e B é invertível (Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível)). Multiplicando $AB = I$ por B^{-1} à direita, $A = B^{-1}$; portanto $BA = BB^{-1} = I$.

Sem determinante: $AB = I$ implica B injetora (se $Bx = 0$ então $x = ABx = 0$); como B é quadrada e a dimensão é finita, B é isomorfismo (esqueleto 4 da Nota 3.43 (Quatro esqueletos de demonstração)). Daí $A = B^{-1}$ e $BA = I$. O segundo caminho explica *por que* a hipótese "quadrada e dimensão finita" é essencial.

exerc-ab-igual-a-identidade

Exercício 4.33 ($A^2 = A$ e $A \neq I$ implicam $\det A = 0$?)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

A demonstração exige: Teorema 4.21 (det$(AB) =$ det $A \cdot$ det B), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível)

Verdadeiro ou falso? *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ *satisfaz* $A^2 = A$ *e* $A \neq I$, *então* $\det A = 0$.

Resolução

Verdadeira. De $A^2 = A$ e da multiplicatividade (Teorema 4.21 (det$(AB) =$ det $A \cdot$ det B)), $(\det A)^2 = \det A$, logo $\det A \in \{0, 1\}$. Se fosse $\det A = 1$, A seria invertível; multiplicando $A^2 = A$ por A^{-1} viria $A = I$, contra a hipótese. Logo $\det A = 0$.
Aqui, como no Exercício 4.32 ($AB = I$ implica $BA = I$?), a hipótese é uma *equação entre matrizes*, e a demonstração consiste em aplicar det aos dois lados.

Veja também: Exercício 4.32 ($AB = I$ implica $BA = I$?)

exerc-idempotente-tem-determinante-nulo

Capítulo 5

Dualidade e quocientes

Espaço dual, base dual e transposta

Motivação 5.1 (O caso $W = \mathbb{R}$ de $\mathcal{L}(V, W)$)

Requer: Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial)

O caso $W = \mathbb{R}$ de $\mathcal{L}(V, W)$ (Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial)) merece estudo próprio, porque aparece em toda parte: equações lineares, coordenadas, avaliações, integrais, o traço.

Veja também: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual)

`mot-dual`

Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual)

Requer: Proposição 1.51 ($\mathcal{L}(V, W)$ é um espaço vetorial)

Um **funcional linear** em V é uma transformação linear $\varphi : V \to \mathbb{R}$. O **espaço dual** de V é $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$, com as operações $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v)$ e $(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v)$.

Usado em: Definição 5.24 (Anulador), Definição 5.8 (Base dual), Definição 5.21 (Duplo dual e aplicação de avaliação), Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear), Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais), Exemplo 7.7 (O produto de dois funcionais e a sua parte alternada), Exemplo 5.5 (Funcionais em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$), Exemplo 5.4 (Funcionais em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$), Exemplo 5.3 (Funcionais em $\mathbb{R}^n$ são vetores-linha), Exemplo 5.6 (Um funcional em $C^0([0,1])$), Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos), Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo)

Veja também: Motivação 5.1 (O caso $W = \mathbb{R}$ de $\mathcal{L}(V, W)$)

`def-dual`

Exemplo 5.3 (Funcionais em $\mathbb{R}^n$ são vetores-linha)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz)

Em $\mathbb{R}^n$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ é um funcional linear. Pelo Corolário 1.54 (Toda transformação linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é multiplicação por uma matriz), *todo* funcional em $\mathbb{R}^n$ é desta forma, com $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ a matriz $1 \times n$ de φ: um *vetor-linha*.

Usado em: Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm), Exemplo 5.19 (A transposta em $\mathbb{R}^n$, com vetores-linha), Nota 5.27 (O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações), Proposição 5.11 (Cálculo da base dual em $\mathbb{R}^n$)

`ex-funcionais-em-rn`

Exemplo 5.4 (Funcionais em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear)

São funcionais lineares em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$: a avaliação $\varepsilon_a(p) = p(a)$; a integral $p \mapsto \int_0^1 p(t)\,dt$; o coeficiente de x^k, $p \mapsto p^{(k)}(0)/k!$.

`ex-funcionais-em-polinomios`

Exemplo 5.5 (Funcionais em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Exemplo 1.43 (O traço é linear)

São funcionais lineares em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$: o traço; a entrada (i,j), $A \mapsto a_{ij}$.

`ex-funcionais-em-matrizes`

Exemplo 5.6 (Um funcional em $C^0([0,1])$)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Exemplo 1.21 (Funções de classe C^k)

Em $C^0([0,1])$, é um funcional linear $f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$, para g fixa.

`ex-funcional-integral-contra-uma-funcao`

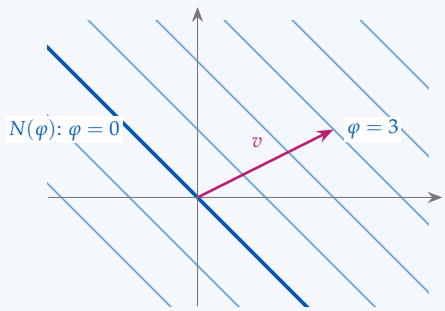
Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)

Se $\dim V = n$, *então* $\dim V^* = n$. *Se* $\varphi \in V^*$ *é não nulo, então* φ *é sobrejetor e* $\dim N(\varphi) = n-1$.

Um subespaço de dimensão $n-1$ chama-se **hiperplano**. A proposição diz: o núcleo de um funcional não nulo é um hiperplano. (A recíproca — todo hiperplano é o núcleo de um funcional, único a menos de múltiplo — é o Corolário 5.26 (Todo hiperplano é o núcleo de um funcional).)



$\varphi(x,y) = x + y$
$v = (2,1)$, $\varphi(v) = 3$:
v atravessa três faixas

Um funcional não nulo em $\mathbb{R}^2$, *desenhado pelas suas retas de nível* $\varphi = c$. *A reta grossa é o núcleo; as outras são paralelas a ele. O valor* $\varphi(v)$ *é o número de faixas que a flecha* v *atravessa. Um vetor é uma flecha; um funcional é uma pilha de retas paralelas.*

Multiplicar φ por 2 deixa as retas de nível duas vezes mais juntas. Já a soma de dois funcionais se faz nos coeficientes, não nas pilhas de retas.

Demonstração

$\dim \mathcal{L}(V, \mathbb{R}) = n \cdot 1$ (Proposição 3.9 ($\mathcal{L}(V,W) \cong \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$)). Se $\varphi \neq 0$, sua imagem é um subespaço não nulo de $\mathbb{R}$, logo é $\mathbb{R}$; pelo Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), $\dim N(\varphi) = n - 1$.

Usado em: Corolário 5.26 (Todo hiperplano é o núcleo de um funcional), Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais), Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas) (dem.), Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha) (dem.), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno) (dem.)

Veja também: Corolário 5.26 (Todo hiperplano é o núcleo de um funcional)

`prop-dimdual`

Definição 5.8 (Base dual)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Definição 2.64 (Base)

Seja $B = (v_1, \dots, v_n)$ base de V. Para cada i, seja $v_i^* \in V^*$ o único funcional com

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(Existe e é único porque um funcional, como toda transformação linear, pode ser prescrito livremente numa base.) A lista $B^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ é a **base dual** de B.

Usado em: Nota 5.10 (v_1^* depende de toda a base, e não só de v_1), Proposição 5.11 (Cálculo da base dual em $\mathbb{R}^n$), Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações), Teorema 7.12 (Base e dimensão de $\mathrm{Alt}^k(V)$), Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas), Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha), Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno), Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos) (dem.)

Veja também: Proposição 1.53 (Transformação linear com valores dados em $e_1, \dots, e_n$)

`def-basedual`

Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)

Requer: Definição 5.8 (Base dual), Definição 2.66 (Coordenadas numa base)

A demonstração exige: Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base), Proposição 1.52 (Uma transformação linear fica determinada num conjunto gerador)

Seja $B = (v_1, \dots, v_n)$ base de V. Então:

(a) *para todo $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^n v_i^*(v)\, v_i$; isto é, $[v]_B = \big(v_1^*(v), \dots, v_n^*(v)\big)$;*

(b) *para todo $\varphi \in V^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i)\, v_i^*$;*

(c) *B^* é base de V^*.*

O item (a) em uma frase: **os elementos da base dual são as funções coordenada**; v_i^* é "a i-ésima coordenada na base B". Os itens (a) e (b) são simétricos: em (a) as coordenadas de um vetor são os valores dos funcionais da base dual; em (b) as coordenadas de um funcional são os seus valores nos vetores da base.

Demonstração

(a) Escreva $v = \sum_j a_j v_j$. Aplicando v_i^*: $v_i^*(v) = \sum_j a_j \delta_{ij} = a_i$.

(b) Os dois lados são funcionais lineares, e coincidem em cada v_j: $\sum_i \varphi(v_i)v_i^*(v_j) = \varphi(v_j)$. Dois lineares que coincidem numa base são iguais.

(c) Por (b), B^* gera V^*. São n vetores num espaço de dimensão n (Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo)), logo formam base (Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)). Diretamente: se $\sum_i c_i v_i^* = 0$, aplicando a v_j vem $c_j = 0$.

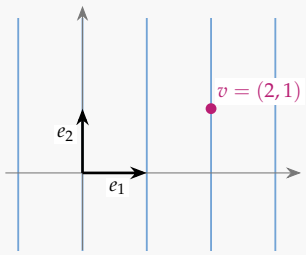
Usado em: Exemplo 5.12 (Uma base dual em $\mathbb{R}^3$), Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha), Proposição 5.25 (Dimensão do anulador) (dem.), Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações) (dem.), Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz) (dem.)

`thm-basedual`

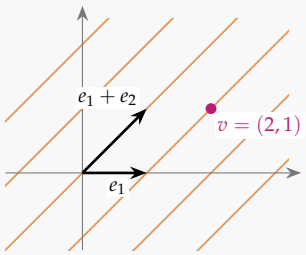
Nota 5.10 (v_1^* depende de toda a base, e não só de v_1)

Requer: Definição 5.8 (Base dual)

v_1^* depende de toda a base, e não só de v_1. Em $\mathbb{R}^2$, com $B = (e_1, e_2)$, temos $e_1^*(x, y) = x$. Com $B' = (e_1,\ e_1 + e_2)$, o primeiro funcional dual ψ deve valer 1 em e_1 e 0 em $e_1 + e_2$: $\psi(x, y) = x - y$. O primeiro vetor é o mesmo nas duas bases; o primeiro funcional dual, não. Por isso a notação v_i^* é perigosa: ela sugere que existe "o dual de um vetor", e não existe.



$B = (e_1, e_2)$
$e_1^*(x, y) = x,\ e_1^*(v) = 2$



$B' = (e_1,\ e_1 + e_2)$
$\psi(x, y) = x - y,\ \psi(v) = 1$

O primeiro vetor das duas bases é o mesmo, e_1; os primeiros funcionais duais são diferentes. À esquerda as retas de nível são paralelas a e_2; à direita, paralelas a $e_1 + e_2$. O funcional dual a e_1 tem de se anular no resto *da base, e o resto mudou.*

A pergunta "quanto vale a primeira coordenada de $v = (2, 1)$?" tem duas respostas diferentes, 2 e 1, e a figura mostra por quê. Não existe uma operação $v \mapsto v^*$ sobre vetores: um isomorfismo $V \to V^*$ exige uma escolha (Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha)), e um produto interno é uma dessas escolhas (Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)).

Usado em: Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha)

Veja também: Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)

`nota-depende`

Proposição 5.11 (Cálculo da base dual em $\mathbb{R}^n$)

Requer: Definição 5.8 (Base dual), Exemplo 5.3 (Funcionais em $\mathbb{R}^n$ são vetores-linha)

(Cálculo da base dual em $\mathbb{R}^n$.) Seja $B = (v_1, \ldots, v_n)$ base de $\mathbb{R}^n$ e P a matriz cujas colunas são os v_j. Então v_i^* é o funcional cujo vetor-linha é a i-ésima linha de P^{-1}.

Demonstração

Seja ℓ_i a i-ésima linha de P^{-1}, vista como funcional $x \mapsto \ell_i x$. A igualdade $P^{-1}P = I$, lida entrada a entrada, diz $\ell_i v_j = \delta_{ij}$.

Usado em: Exemplo 5.12 (Uma base dual em $\mathbb{R}^3$)

`prop-calc`

Exemplo 5.12 (Uma base dual em $\mathbb{R}^3$)

Requer: Proposição 5.11 (Cálculo da base dual em $\mathbb{R}^n$), Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)

Em $\mathbb{R}^3$, seja $B = \big((1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\big)$. A matriz com essas colunas e sua inversa são as do Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$v_1^*(x,y,z) = \tfrac{1}{2}(x+y-z), \qquad v_2^*(x,y,z) = \tfrac{1}{2}(-x+y+z), \qquad v_3^*(x,y,z) = \tfrac{1}{2}(x-y+z).$$

Confira uma: $v_1^*(0,1,1) = \frac{1}{2}(0+1-1) = 0$. Para escrever $\varphi(x,y,z) = x - 2y + z$ na base B^*, o Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)(b) diz que os coeficientes são os valores de φ na base B:

$$\varphi(v_1) = -1, \quad \varphi(v_2) = -1, \quad \varphi(v_3) = 2, \qquad \text{logo} \qquad \varphi = -v_1^* - v_2^* + 2v_3^*.$$

Verificação: $-\frac{1}{2}(x+y-z) - \frac{1}{2}(-x+y+z) + (x-y+z) = x - 2y + z$. O cálculo de B^* é o mesmo cálculo da mudança de base (Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas)): as coordenadas *são* a base dual, e a matriz P^{-1} *é* o conversor de coordenadas.

Veja também: Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo), Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas)

`ex-q2`

Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações)

Requer: Definição 5.8 (Base dual), Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear)

A demonstração exige: Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)

Sejam $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ distintos e $\varepsilon_i(p) = p(t_i)$ em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. O determinante de Vandermonde (Exemplo 4.29 (Vandermonde e interpolação)) mostra que $p \mapsto (p(t_0), \ldots, p(t_n))$ é um isomorfismo; aqui isso ganha uma leitura no dual.

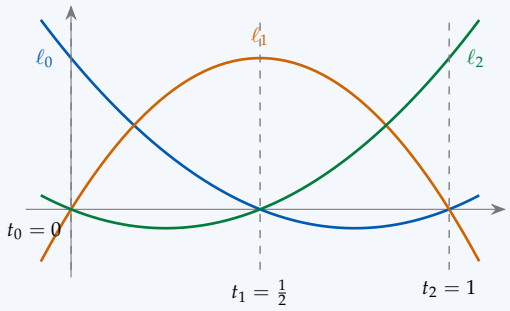
Os polinômios de Lagrange

$$\ell_j(t) = \prod_{k \neq j} \frac{t - t_k}{t_j - t_k}, \qquad j = 0, \ldots, n,$$

formam uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, e $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ é a sua base dual. Em particular, $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ é base

de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})^*$, e todo $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ se escreve

$$p = \sum_{i=0}^{n} p(t_i)\, \ell_i.$$



Os três polinômios de Lagrange de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ para os nós $0, \frac{1}{2}, 1$. Cada um vale 1 no seu nó e 0 nos outros dois: é a relação $\varepsilon_i(\ell_j) = \delta_{ij}$ desenhada. Para reconstruir um p de grau ≤ 2 a partir de $p(0), p(\frac{1}{2}), p(1)$, basta somar as três curvas com esses pesos.

Demonstração

Cada ℓ_j tem grau n, vale 1 em t_j e 0 nos demais t_k: isto é, $\varepsilon_i(\ell_j) = \delta_{ij}$. Os ℓ_j são LI: se $\sum_j c_j \ell_j = 0$, avaliando em t_i vem $c_i = 0$. São $n+1$ vetores LI em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, logo base; e as relações $\varepsilon_i(\ell_j) = \delta_{ij}$ dizem que (ε_i) é a base dual. A fórmula final é o Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)(a).

Usado em: Exemplo 5.14 (Regra de Simpson), Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples) (dem.)

Veja também: Exemplo 4.29 (Vandermonde e interpolação)

`prop-lagrange`

Exemplo 5.14 (Regra de Simpson)

Requer: Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações)

Seja $\varphi(p) = \int_0^1 p(t)\, dt$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com nós $0, \frac{1}{2}, 1$. Pelo Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)(b), $\varphi = \sum_i \varphi(\ell_i)\, \varepsilon_i$. Com $\ell_0 = 2(t - \frac{1}{2})(t-1)$, $\ell_1 = -4t(t-1)$, $\ell_2 = 2t(t - \frac{1}{2})$, as integrais valem $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$. Logo, para todo p de grau ≤ 2,

$$\int_0^1 p(t)\, dt = \tfrac{1}{6}\, p(0) + \tfrac{4}{6}\, p(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{6}\, p(1).$$

Não é uma aproximação: é uma igualdade em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})^*$, que tem dimensão 3.
Teste em $p = t^2$: $\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}$. A moral: *um funcional em dimensão 3 fica determinado por 3 números*; se três avaliações formam base, a integral é uma combinação delas.

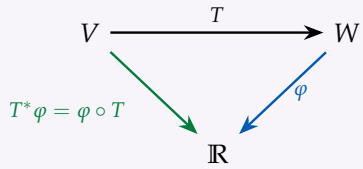
`ex-simpson`

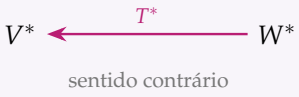
Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual)

Seja $T : V \to W$ linear. A **transposta** de T é

$$T^* : W^* \to V^*, \qquad T^*(\varphi) = \varphi \circ T.$$





A transposta. Um funcional em W (azul), composto com T, dá um funcional em V (verde). Assim T^* vai de W^* para V^*: o sentido se inverte. Em termos de equações: uma equação $\varphi = 0$ em W puxa *para a equação $\varphi(T(v)) = 0$ em V.*

Usado em: Exemplo 5.19 (A transposta em $\mathbb{R}^n$, com vetores-linha), Exercício 5.37 (Se $T(S) \subset S$, então $T^*(S^0) \subset S^0$?), Proposição 5.55 ($(V/S)^* \cong S^0$), Proposição 5.16 (Propriedades da transposta), Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear), Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta) (dem.)

`def-transp`

Proposição 5.16 (Propriedades da transposta)

Requer: Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear), Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Proposição 1.49 (A composta de transformações lineares é linear)

Sejam $T : V \to W$ e $S : W \to U$ lineares.

(a) *T^* está bem definida e é linear.*

(b) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$ *e* $(\mathrm{Id}_V)^* = \mathrm{Id}_{V^*}$.

(c) *Se T é isomorfismo, então T^* é isomorfismo e* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Demonstração

(a) $\varphi \circ T$ é composta de lineares, logo está em V^*. E $T^*(\varphi + \lambda\psi) = (\varphi + \lambda\psi) \circ T = \varphi \circ T + \lambda\,\psi \circ T$, porque as operações em V^* são ponto a ponto.
(b) $(S \circ T)^*(\varphi) = \varphi \circ S \circ T = T^*(S^*(\varphi))$. A outra é imediata.
(c) Aplique (b) a $T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}_V$ e $T \circ T^{-1} = \mathrm{Id}_W$: $T^* \circ (T^{-1})^* = \mathrm{Id}_{V^*}$ e $(T^{-1})^* \circ T^* = \mathrm{Id}_{W^*}$.

Usado em: Corolário 5.18 ($(AB)^t = B^t A^t$) (dem.)

`prop-transp`

Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz)

Requer: Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear), Definição 5.8 (Base dual), Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

A demonstração exige: Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)

Sejam $B = (v_1, \ldots, v_n)$ base de V, $C = (w_1, \ldots, w_m)$ base de W, e B^*, C^* as bases duais. Então

$$[T^*]_{B^*C^*} = \big([T]_{CB}\big)^t.$$

É aqui que a transposta de matriz ganha significado: ela é a matriz de *outra* transformação, que vive entre os duais e anda no sentido contrário.

Demonstração

Seja $[T]_{CB} = (a_{ij})$, isto é, $T(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$. A coluna j de $[T^*]_{B^*C^*}$ é $[T^*(w_j^*)]_{B^*}$, e pelo Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas)(b) sua entrada i é o valor de $T^*(w_j^*)$ em v_i:

$$T^*(w_j^*)(v_i) = w_j^*(T(v_i)) = w_j^*\Big(\sum_k a_{ki} w_k\Big) = a_{ji}.$$

Portanto a entrada (i, j) de $[T^*]_{B^*C^*}$ é a_{ji}.

Usado em: Corolário 5.18 ($(AB)^t = B^t A^t$) (dem.), Corolário 5.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas, pelo dual) (dem.)

`thm-matriz-da-transposta`

Corolário 5.18 ($(AB)^t = B^t A^t$)

A demonstração exige: Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz), Proposição 5.16 (Propriedades da transposta), Teorema 3.7 (A matriz da composta é o produto das matrizes)

$(AB)^t = B^t A^t$ para matrizes compatíveis, e $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Demonstração

Sejam $T = T_B$ e $S = T_A$, com as bases canônicas. Pelo Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz) e pela Proposição 5.16 (Propriedades da transposta)(b),

$$(AB)^t = [(S \circ T)^*] = [T^* \circ S^*] = [T^*][S^*] = B^t A^t.$$

A segunda é a Proposição 5.16 (Propriedades da transposta)(c) lida da mesma forma.

`cor-abt`

Exemplo 5.19 (A transposta em $\mathbb{R}^n$, com vetores-linha)

Requer: Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear), Exemplo 5.3 (Funcionais em $\mathbb{R}^n$ são vetores-linha)

A transposta em $\mathbb{R}^n$, com vetores-linha. Seja $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $X \mapsto AX$. Um funcional em $\mathbb{R}^m$ é um vetor-linha y ($1 \times m$), e

$$T_A^*(y) = y \circ T_A : \ X \mapsto yAX.$$

Isto é: T_A^* é "multiplicar o vetor-linha por A à direita", $y \mapsto yA$. Escrevendo os vetores-linha em pé, isso é $y^t \mapsto A^t y^t$. Por exemplo, para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e o funcional $y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^2$, que é $(u, v) \mapsto u - v$:

$$T_A^*(y) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

isto é, $T_A^*(y)(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 3x_3$. Confira: $T_A(x) = (x_1 + 2x_2,\ x_2 + 3x_3)$, e $u - v = x_1 + x_2 - 3x_3$.

Uma consequência: $T_A^*(y) = 0$ significa $yA = 0$, isto é, y anula todas as colunas de A — e as colunas geram $\mathrm{Im}(T_A)$. Ou seja, $N(T^*)$ são os funcionais que se anulam na imagem

de T. É a fórmula $N(T^*) = \mathrm{Im}(T)^0$ do Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear).

Usado em: Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm) (dem.)

Veja também: Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear)

`ex-linhas`

Duplo dual e anulador

Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha)

Requer: Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas), Nota 5.10 (v_1^* depende de toda a base, e não só de v_1), Definição 1.66 (Isomorfismo)

$V \cong V^*$ depende de escolha. Uma base B dá um isomorfismo $\Phi_B : V \to V^*$, o que manda v_i em v_i^*. Em $\mathbb{R}^2$, com $B = (e_1, e_2)$ temos $\Phi_B(e_1) = e_1^*$, o funcional $(x, y) \mapsto x$. Com $B' = (e_1, e_1 + e_2)$ temos $\Phi_{B'}(e_1)$ igual ao funcional $(x, y) \mapsto x - y$ (Nota 5.10 (v_1^* depende de toda a base, e não só de v_1)). O mesmo vetor e_1 vai em funcionais diferentes: não há um isomorfismo $V \to V^*$ preferido.

Usado em: Motivação 6.1 (A estrutura que faltava para escolher)

`nota-isomorfismo-com-o-dual-depende-de-base`

Definição 5.21 (Duplo dual e aplicação de avaliação)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual)

O **duplo dual** de V é $V^{**} = (V^*)^*$. A **aplicação de avaliação** é

$$\mathrm{ev} : V \to V^{**}, \qquad \mathrm{ev}(v)(\varphi) = \varphi(v).$$

Em palavras: um vetor v é visto como a função "avaliar em v", que come um funcional e devolve um número.

Usado em: Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha)

`def-duplo-dual`

Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual)

A demonstração exige: Teorema 2.79 (Teorema do completamento), Definição 5.8 (Base dual)

Se $v \in V$ e $\varphi(v) = 0$ para todo $\varphi \in V^*$, então $v = 0$.

Demonstração

Se $v \neq 0$, complete (v) a uma base $(v, v_2, \ldots, v_n)$ de V (Teorema 2.79 (Teorema do completamento)). O primeiro funcional da base dual vale 1 em v.

Usado em: Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção) (dem.), Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha) (dem.)

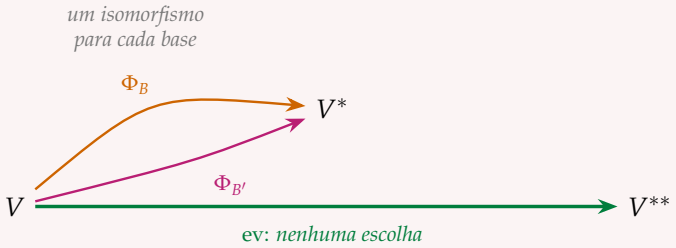
`lem-separa`

Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha)

Requer: Definição 5.21 (Duplo dual e aplicação de avaliação), Definição 1.66 (Isomorfismo), Definição 5.8 (Base dual)

A demonstração exige: Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos), Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)

ev *é um isomorfismo, e sua definição não usa escolha nenhuma. Além disso, para toda base B de V, a base dual de B^* é* $\mathrm{ev}(B)$.



Os isomorfismos $V \to V^*$ vêm em família, um para cada base, e bases diferentes dão isomorfismos diferentes. O isomorfismo $V \to V^{**}$ é um só, e é definido sem mencionar base. É isso que a palavra canônico *quer dizer.*

Este é o sentido correto da palavra "canônico". Na Nota 2.68 (Escolher uma base é escolher um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$) ("só $\mathbb{R}^n$ tem base canônica"), canônico queria dizer que a escolha já vinha feita; aqui, que não há escolha a fazer. Identificamos V com V^{**} via ev e escrevemos $v(\varphi) = \varphi(v)$: os elementos de V^{**} são os vetores de V, agindo por avaliação.

Demonstração

$\mathrm{ev}(v)$ é linear em φ porque as operações de V^* são ponto a ponto: $\mathrm{ev}(v)(\varphi + \lambda\psi) = \varphi(v) + \lambda\psi(v)$. E ev é linear em v porque cada φ é linear. Se $\mathrm{ev}(v) = 0$, então $\varphi(v) = 0$ para todo φ, e $v = 0$ pelo Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos). Logo ev é injetora; como $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$, é isomorfismo (Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)).

Para a última afirmação: $\mathrm{ev}(v_i)(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij}$, que é a relação que define a base dual de B^*.

Usado em: Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$), Proposição 7.11 (O produto exterior é alternado e detecta dependência linear) (dem.)

Veja também: Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha), Nota 2.68 (Escolher uma base é escolher um isomorfismo com $\mathbb{R}^n$)

`thm-ev`

Definição 5.24 (Anulador)

Requer: Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual)

Seja $S \subset V$ um subconjunto. O **anulador** de S é

$$S^0 = \{\varphi \in V^* : \varphi(s) = 0 \text{ para todo } s \in S\} \subset V^*.$$

Usado em: Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$), Corolário 5.26 (Todo hiperplano é o núcleo de um funcional), Exercício 5.37 (Se $T(S) \subset S$, então $T^*(S^0) \subset S^0$?), Nota 5.27 (O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações), Proposição 5.25 (Dimensão do anulador), Proposição 5.55 ($(V/S)^* \cong S^0$), Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)

`def-anul`

Proposição 5.25 (Dimensão do anulador)

Requer: Definição 5.24 (Anulador), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas), Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

Seja S subespaço de V, $\dim V = n$ e $\dim S = k$. Então S^0 é subespaço de V^* e $\dim S^0 = n - k$. Mais precisamente: se $(v_1, \ldots, v_k)$ é base de S e $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V que a completa, então $(v_{k+1}^*, \ldots, v_n^*)$ é base de S^0.

Demonstração

S^0 é subespaço: se φ, ψ se anulam em S, $\varphi + \lambda\psi$ também. Para $j > k$, v_j^* se anula em $v_1, \ldots, v_k$, logo em S: $v_j^* \in S^0$. Os v_j^* são LI (são parte de uma base). Geram S^0: se $\varphi \in S^0$, então

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i)\, v_i^* = \sum_{i=k+1}^{n} \varphi(v_i)\, v_i^*,$$

porque $\varphi(v_i) = 0$ para $i \leq k$.

Usado em: Exemplo 5.28 (Equações de um subespaço de $\mathbb{R}^4$ pelo anulador), Nota 5.29 (O anulador de uma reta de $\mathbb{R}^3$: um leque de planos), Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas), Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$) (dem.), Corolário 5.26 (Todo hiperplano é o núcleo de um funcional) (dem.), Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção) (dem.), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear) (dem.)

`prop-dimanul`

Corolário 5.26 (Todo hiperplano é o núcleo de um funcional)

Requer: Definição 5.24 (Anulador), Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo)

A demonstração exige: Proposição 5.25 (Dimensão do anulador), Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço)

Todo hiperplano H de V é o núcleo de um funcional não nulo, e dois funcionais não nulos com o mesmo núcleo são múltiplos um do outro.

Demonstração

$\dim H^0 = n - (n-1) = 1$. Um $\varphi \neq 0$ em H^0 tem $H \subset N(\varphi)$, e os dois têm dimensão $n-1$ (Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo)), logo $H = N(\varphi)$. Se $N(\psi) = H$, então $\psi \in H^0$, que é a reta $[\varphi]$.

`cor-hiper`

Nota 5.27 (O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações)

Requer: Definição 5.24 (Anulador), Exemplo 5.3 (Funcionais em $\mathbb{R}^n$ são vetores-linha), Definição 3.19 (Sistema linear)

O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações. Identifique um funcional em $\mathbb{R}^n$ com seu vetor-linha $y = (y_1 \ \cdots \ y_n)$. Se $S = [u_1, \ldots, u_k] \subset \mathbb{R}^n$, então

$$y \in S^0 \iff yu_1 = \cdots = yu_k = 0,$$

isto é, S^0 é o espaço solução do sistema homogêneo cujas *linhas* são os u_i (nas incógnitas

$y_1, \dots, y_n$). E um vetor-linha $y \in S^0$ é o vetor de coeficientes de uma equação $y_1x_1 + \cdots + y_nx_n = 0$ satisfeita por todo $x \in S$. Uma base de S^0 é um sistema de equações mínimo para S — e o Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$) garante que essas equações definem exatamente S.

Usado em: Exemplo 5.28 (Equações de um subespaço de $\mathbb{R}^4$ pelo anulador)

Veja também: Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$), Exemplo 3.39 (As duas descrições de um subespaço: geradores e equações)

`nota-anulador-sao-equacoes`

Exemplo 5.28 (Equações de um subespaço de $\mathbb{R}^4$ pelo anulador)

Requer: Nota 5.27 (O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações), Proposição 5.25 (Dimensão do anulador)

Seja

$$S = [(1,2,-1,0),\ (0,1,1,1)] \subset \mathbb{R}^4.$$

Os dois vetores são LI, dim $S = 2$, logo dim $S^0 = 2$. O sistema

$$y_1 + 2y_2 - y_3 = 0, \qquad y_2 + y_3 + y_4 = 0$$

tem y_3, y_4 livres: $y_2 = -y_3 - y_4$ e $y_1 = -2y_2 + y_3 = 3y_3 + 2y_4$. Uma base de S^0:

$$(3,-1,1,0), \qquad (2,-1,0,1).$$

Portanto

$$S = \{(x,y,z,w) :\ 3x - y + z = 0,\ \ 2x - y + w = 0\}.$$

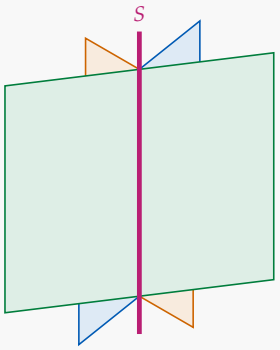
Confira: $(1,2,-1,0)$ dá $3-2-1=0$ e $2-2+0=0$.
É o Exemplo 3.39 (As duas descrições de um subespaço: geradores e equações), agora com nome. A receita: *para achar equações de $S = [u_1, \dots, u_k]$, resolva o sistema cujas linhas são os u_i; cada solução é uma equação de S, e uma base das soluções é um sistema mínimo.* O número mínimo de equações é $n - \dim S$.

Veja também: Exemplo 3.39 (As duas descrições de um subespaço: geradores e equações)

`ex-s0`

Nota 5.29 (O anulador de uma reta de $\mathbb{R}^3$: um leque de planos)

Requer: Proposição 5.25 (Dimensão do anulador)



S: uma reta de $\mathbb{R}^3$
S^0: os planos que a contêm (a menos de escala)
dim $S^0 = 3 - 1 = 2$

O anulador de uma reta $S \subset \mathbb{R}^3$. Cada funcional não nulo em S^0 tem um plano por núcleo, e esse plano contém S. Os planos que contêm a reta formam um leque a um

parâmetro (por isso $\dim S^0 = 2$: um parâmetro de direção e um de escala). Dois planos quaisquer do leque já cortam exatamente a reta.

nota-anulador-de-uma-reta

Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção)

Requer: Definição 5.24 (Anulador), Definição 2.19 (Soma de subespaços)

A demonstração exige: Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos), Proposição 5.25 (Dimensão do anulador), Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)

Sejam S, S_1, S_2 subespaços de V.

(a) $S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2^0 \subset S_1^0$; $\{0\}^0 = V^*$ *e* $V^0 = \{0\}$.

(b) $(S_1 + S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$ *e* $(S_1 \cap S_2)^0 = S_1^0 + S_2^0$.

Demonstração

(a) Um funcional que se anula em S_2 se anula em $S_1 \subset S_2$. Os dois casos extremos são a definição e o Lema 5.22 (Os funcionais separam pontos).

(b) Um funcional se anula em $S_1 + S_2$ se e somente se se anula em S_1 e em S_2 (pela linearidade). Isso dá a primeira igualdade. Na segunda, a inclusão $\supset$ vem de (a): $S_1 \cap S_2 \subset S_i$ dá $S_i^0 \subset (S_1 \cap S_2)^0$, e esse é um subespaço. Para a igualdade, contamos dimensões com a fórmula da soma (Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)), a primeira igualdade e a Proposição 5.25 (Dimensão do anulador). Escrevendo $s_i = \dim S_i$:

$$\begin{aligned}\dim(S_1^0 + S_2^0) &= (n - s_1) + (n - s_2) - \dim(S_1^0 \cap S_2^0) \\ &= (n - s_1) + (n - s_2) - \big(n - \dim(S_1 + S_2)\big) \\ &= n - \big(s_1 + s_2 - \dim(S_1 + S_2)\big) = n - \dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1 \cap S_2)^0.\end{aligned}$$

Usado em: Nota 5.32 (O dicionário entre subespaços e anuladores), Nota 6.42 (Dicionário: subespaços, dual e produto interno)

prop-operacoes-com-anuladores

Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$)

Requer: Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha), Definição 5.24 (Anulador)

A demonstração exige: Proposição 5.25 (Dimensão do anulador)

Identificando V com V^{**} via ev, *vale $(S^0)^0 = S$ para todo subespaço S. Em termos de equações: um vetor que satisfaz todas as equações lineares satisfeitas por S está em S.*

Demonstração

$(S^0)^0 \subset V^{**}$, e $\mathrm{ev}(S) \subset (S^0)^0$: se $s \in S$ e $\varphi \in S^0$, então $\mathrm{ev}(s)(\varphi) = \varphi(s) = 0$. As dimensões: $\dim(S^0)^0 = n - (n - k) = k = \dim \mathrm{ev}(S)$.

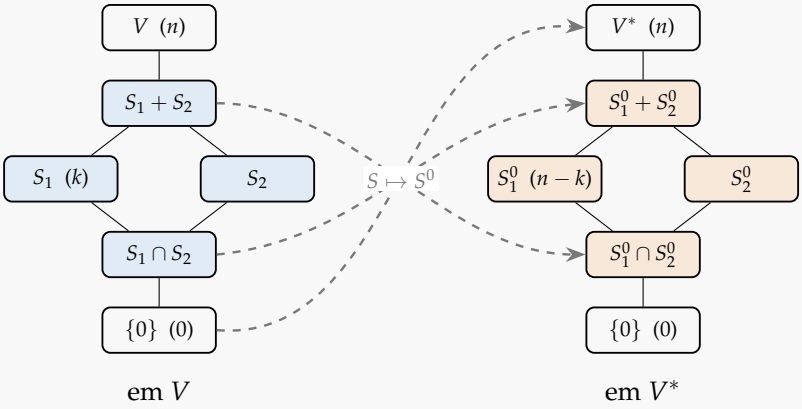
Usado em: Nota 5.32 (O dicionário entre subespaços e anuladores), Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm) (dem.)

Veja também: Nota 5.32 (O dicionário entre subespaços e anuladores)

cor-dupla

Nota 5.32 (O dicionário entre subespaços e anuladores)

Requer: Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção), Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$)



O dicionário da Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção). A passagem ao anulador vira o desenho de cabeça para baixo: o que era pequeno fica grande, a soma vai na interseção e a interseção vai na soma, e a dimensão k vai em $n-k$. O Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$) diz que fazer isso duas vezes devolve o desenho original.
Em palavras, $(S_1 + S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$ diz: *as equações da soma são as equações comuns*. E $(S_1 \cap S_2)^0 = S_1^0 + S_2^0$: *para obter equações da interseção, junte as equações dos dois* — é o que se faz ao calcular uma interseção. Atenção: a igualdade $(S_1 \cap S_2)^0 = S_1^0 \cap S_2^0$ é falsa; tome duas retas distintas em $\mathbb{R}^2$.

`nota-dicionario-do-anulador`

Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear)

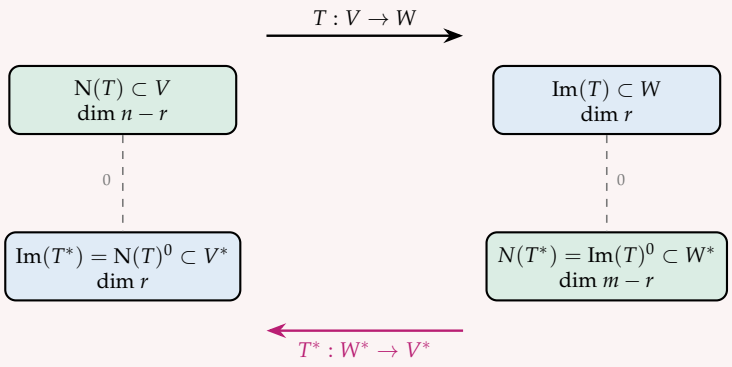
Requer: Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear), Definição 5.24 (Anulador), Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Proposição 5.25 (Dimensão do anulador), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)

Seja $T : V \to W$ linear, $\dim V = n$, $\dim W = m$. Então

$$N(T^*) = \mathrm{Im}(T)^0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}(T^*) = \mathrm{N}(T)^0.$$

Em particular, $\dim \mathrm{Im}(T^*) = \dim \mathrm{Im}(T)$.



Os quatro subespaços. Em cima, núcleo e imagem de T; embaixo, os de T^*. Cada um de baixo é o anulador do de cima, trocando os papéis: a imagem de T^* anula o núcleo de T, e o núcleo de T^* anula a imagem de T. As cores marcam os dois pares de mesma dimensão.

Demonstração

Primeira. $\varphi \in N(T^*) \iff \varphi \circ T = 0 \iff \varphi(T(v)) = 0$ para todo $v \iff \varphi$ se anula em $\mathrm{Im}(T)$.

Segunda. Se $\psi = \varphi \circ T$ e $v \in \mathrm{N}(T)$, então $\psi(v) = \varphi(0) = 0$: isso dá $\mathrm{Im}(T^*) \subset \mathrm{N}(T)^0$. Seja $r = \dim \mathrm{Im}(T)$. Pela primeira igualdade, pelo Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem) e pela Proposição 5.25 (Dimensão do anulador),

$$\dim \mathrm{Im}(T^*) = m - \dim N(T^*) = m - (m-r) = r, \qquad \dim \mathrm{N}(T)^0 = n - (n-r) = r.$$

Os dois têm a mesma dimensão, e um contém o outro.

Usado em: Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas), Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm) (dem.), Corolário 5.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas, pelo dual) (dem.)

Veja também: Exemplo 5.19 (A transposta em $\mathbb{R}^n$, com vetores-linha)

`thm-quatro`

Corolário 5.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas, pelo dual)

Requer: Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

A demonstração exige: Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear), Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz)

Posto por linhas = posto por colunas. Para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, o número máximo de colunas LI de A é igual ao número máximo de linhas LI.

No Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas) esse resultado saiu do escalonamento, com contas. Aqui ele sai de duas linhas, e a demonstração não usa matriz nenhuma: é um fato sobre T e T^*. Da mesma fórmula saem: T injetora $\iff$ T^* sobrejetora, e T sobrejetora $\iff$ T^* injetora.

Demonstração

O posto por colunas é $\dim \mathrm{Im}(T_A)$ (Definição 3.23 (Posto de uma matriz)). A matriz de T_A^* nas bases duais das canônicas é A^t (Teorema 5.17 (A matriz da transposta é a transposta da matriz)), cujas colunas são as linhas de A; logo o posto por linhas é $\dim \mathrm{Im}(T_A^*)$. O teorema diz que são iguais.

Veja também: Teorema 3.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas)

`cor-posto-linhas-igual-colunas`

Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm)

Requer: Definição 3.19 (Sistema linear), Exemplo 5.3 (Funcionais em $\mathbb{R}^n$ são vetores-linha)

A demonstração exige: Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear), Proposição 3.21 ($AX = b$ tem solução quando b está na imagem de T_A), Exemplo 5.19 (A transposta em $\mathbb{R}^n$, com vetores-linha)

O sistema $AX = b$ tem solução se e somente se $yb = 0$ para todo vetor-linha y com $yA = 0$.

Demonstração

$AX = b$ tem solução $\iff b \in \mathrm{Im}(T_A) = (\mathrm{Im}(T_A)^0)^0 = N(T_A^*)^0$, pelo Corolário 5.31 ($(S^0)^0 = S$) e pelo Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear). E $N(T_A^*) = \{y : yA = 0\}$ (Exemplo 5.19 (A transposta em $\mathbb{R}^n$, com vetores-linha)).

Usado em: Exemplo 5.36 (A alternativa de Fredholm num sistema 3×2)

`cor-fred`

Exemplo 5.36 (A alternativa de Fredholm num sistema 3×2)

Requer: Corolário 5.35 (Alternativa de Fredholm)

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, as soluções de $yA = 0$ são $y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$ e $y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$, isto é, $y = t(-1, -1, 1)$. Logo $AX = b$ tem solução se e somente se $b_3 = b_1 + b_2$. A condição lê a relação entre as linhas de A (terceira = primeira + segunda), e é a única condição: toda obstrução à solubilidade vem de uma combinação das equações que zera o lado esquerdo.

`ex-fred`

Exercício 5.37 (Se $T(S) \subset S$, então $T^*(S^0) \subset S^0$?)

Requer: Definição 5.24 (Anulador), Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear)

Verdadeiro ou falso? *Se $T : V \to V$ é linear e $T(S) \subset S$, então $T^*(S^0) \subset S^0$.*

Resolução

Verdadeira. Seja $\varphi \in S^0$. Para $s \in S$, $(T^*\varphi)(s) = \varphi(T(s)) = 0$, porque $T(s) \in S$. Logo $T^*\varphi \in S^0$.

Veja também: Definição 8.38 (Subespaço invariante)

`exerc-invariante-e-anulador`

Espaços quocientes e teoremas de isomorfismo

Motivação 5.38 (Identificar vetores cuja diferença está num subespaço)

Requer: Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo)

Três situações conhecidas com a mesma forma: inteiros módulo n ($a \equiv b$ se $n \mid a - b$); ângulos módulo 2π; e primitivas, que são definidas "a menos de constante" ($F \sim G$ se $F - G$ é constante). Em cada caso se identificam objetos cuja diferença está num subconjunto fixo, e as contas continuam fazendo sentido.

Em álgebra linear: se $T : V \to W$ é linear, as fibras de T são transladados do núcleo, e T toma um único valor em cada uma (Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo)). O objeto de estudo passa a ser o conjunto das fibras (Definição 5.39 (Classes módulo um subespaço; o conjunto V/S)).

Veja também: Definição 5.39 (Classes módulo um subespaço; o conjunto V/S), Exemplo 5.47 (A derivada no quociente pelas constantes)

`mot-quociente`

Definição 5.39 (Classes módulo um subespaço; o conjunto V/S)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Seja S um subespaço de V. Para $u, v \in V$, escrevemos $u \sim v$ ("u é congruente a v módulo S") se $u - v \in S$. A **classe** de v é

$$\bar{v} = v + S = \{v + s : s \in S\},$$

e o conjunto das classes é denotado V/S ("V módulo S").

Usado em: Definição 7.31 (Cohomologia de um complexo), Lema 5.40 (Congruência módulo S é uma relação de equivalência), Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π)

Veja também: Motivação 5.38 (Identificar vetores cuja diferença está num subespaço)

`def-quoc`

Lema 5.40 (Congruência módulo S é uma relação de equivalência)

Requer: Definição 5.39 (Classes módulo um subespaço; o conjunto V/S)

$\sim$ é uma relação de equivalência, e $u + S = v + S$ se e somente se $u - v \in S$. Em particular, $v + S = S$ se e somente se $v \in S$.

Demonstração

$v - v = 0 \in S$; se $u - v \in S$ então $v - u = -(u - v) \in S$; se $u - v, v - w \in S$ então $u - w = (u - v) + (v - w) \in S$. Se $u - v \in S$, então $u + s = v + \big((u - v) + s\big) \in v + S$ para todo $s \in S$, logo $u + S \subset v + S$, e por simetria vale a igualdade. Se $u + S = v + S$, então $u = u + 0 \in v + S$, isto é, $u - v \in S$.

Usado em: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π) (dem.), Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente) (dem.)

`lem-equiv`

Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π)

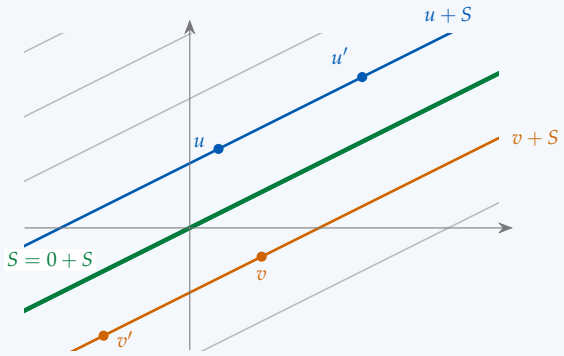
Requer: Definição 5.39 (Classes módulo um subespaço; o conjunto V/S), Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Lema 5.40 (Congruência módulo S é uma relação de equivalência)

As operações

$$(u + S) + (v + S) = (u + v) + S, \qquad \lambda(v + S) = \lambda v + S$$

estão bem definidas e fazem de V/S um espaço vetorial, com vetor nulo $0 + S = S$. A projeção $\pi : V \to V/S$, $\pi(v) = v + S$, é linear, sobrejetora, e $N(\pi) = S$.



$u \sim u'$: $u - u' \in S$
V/S: *o conjunto das retas paralelas a* S

$\mathbb{R}^2$ *módulo uma reta* S *(verde). As classes são as retas paralelas a* S*;* u *e* u' *estão na mesma classe (azul),* v *e* v' *em outra (laranja). Um elemento de* V/S *é uma reta inteira, e não um ponto. A classe nula é a própria* S*.*

Na figura: somando $u + v$ e $u' + v'$, os dois pontos caem na mesma paralela. Isso *é* a boa definição. E que dimensão tem o conjunto das paralelas? Uma paralela fica determinada pelo ponto em que corta uma reta transversal fixa, logo V/S "parece" uma reta. A Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$) confirma.

Demonstração

Boa definição: as fórmulas usam representantes, e é preciso ver que o resultado não depende deles. Se $u + S = u' + S$ e $v + S = v' + S$, então

$$(u+v) - (u'+v') = (u-u') + (v-v') \in S, \qquad \lambda u - \lambda u' = \lambda(u-u') \in S,$$

e o Lema 5.40 (Congruência módulo S é uma relação de equivalência) dá $(u+v)+S = (u'+v')+S$ e $\lambda u + S = \lambda u' + S$.

Axiomas: por construção, $\pi(u+v) = \pi(u) + \pi(v)$ e $\pi(\lambda v) = \lambda\pi(v)$. Cada axioma em V/S é a imagem por π do mesmo axioma em V; por exemplo, $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \pi(\lambda(u+v)) = \pi(\lambda u + \lambda v) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v}$. O vetor nulo é $\pi(0) = S$, e $-\bar{v} = \overline{-v}$.

π*:* é linear pelas duas igualdades acima; é sobrejetora por definição de V/S; e $\pi(v) = 0 \iff v + S = S \iff v \in S$.

Usado em: Corolário 5.54 (Segundo teorema do isomorfismo), Exemplo 7.25 (A sequência exata de um quociente), Exercício 5.57 (Subespaços de mesma dimensão têm quocientes isomorfos?), Exercício 5.58 (Quocientes isomorfos implicam subespaços iguais?), Proposição 5.53 (Todo complementar de S é isomorfo a V/S), Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$), Proposição 5.55 ($(V/S)^* \cong S^0$), Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos), Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente)

Veja também: Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

`prop-oper`

Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π), Definição 2.75 (Dimensão)

Seja $(v_1, \ldots, v_k)$ *base de* S*, completada a uma base* $(v_1, \ldots, v_n)$ *de* V*. Então* $(\bar{v}_{k+1}, \ldots, \bar{v}_n)$ *é base de* V/S*. Em particular,*

$$\dim V/S = \dim V - \dim S.$$

A demonstração não usa o teorema do núcleo e da imagem — e isso importa, porque o Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente) deduz esse teorema do quociente, e não queremos círculo.

Demonstração

Gera: dado $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, temos $\bar{v} = \sum_i a_i \bar{v}_i = \sum_{i>k} a_i \bar{v}_i$, porque $\bar{v}_i = 0$ para $i \leq k$. *LI:* se $\sum_{i>k} c_i \bar{v}_i = 0$, então $\sum_{i>k} c_i v_i \in S = [v_1, \ldots, v_k]$, isto é, $\sum_{i>k} c_i v_i = \sum_{i \leq k} d_i v_i$; como $(v_1, \ldots, v_n)$ é LI, todos os c_i são nulos.

Usado em: Exemplo 5.43 ($\mathbb{R}^3$ módulo uma reta e módulo um plano), Exemplo 5.44 (Polinômios módulo as constantes), Exemplo 5.45 (Reduzir o representante em $\mathbb{R}^4/S$), Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente) (dem.), Corolário 5.54 (Segundo teorema do isomorfismo) (dem.), Exercício 5.57 (Subespaços de mesma dimensão têm quocientes isomorfos?) (dem.), Exercício 5.58 (Quocientes isomorfos implicam subespaços iguais?) (dem.), Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos) (dem.), Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo) (dem.), Teorema 8.54 (Triangularização) (dem.)

Veja também: Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente)

`prop-dimq`

Exemplo 5.43 ($\mathbb{R}^3$ módulo uma reta e módulo um plano)

Requer: Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

$\mathbb{R}^3/S$ com S uma reta: as classes são as retas paralelas a S, e $\dim \mathbb{R}^3/S = 2$. Com S um plano: as classes são os planos paralelos, e $\dim \mathbb{R}^3/S = 1$.

`ex-quoc-a`

Exemplo 5.44 (Polinômios módulo as constantes)

Requer: Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$), Exemplo 1.39 (A derivada é linear)

$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})/\{\text{constantes}\}$: duas classes são iguais quando os polinômios diferem por uma constante — quando têm a mesma derivada. A dimensão é n.

Usado em: Exemplo 5.47 (A derivada no quociente pelas constantes)

`ex-quoc-b`

Exemplo 5.45 (Reduzir o representante em $\mathbb{R}^4/S$)

Requer: Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

Em $\mathbb{R}^4$, $S = [(1,1,0,0),(0,1,1,0)]$. Os vetores $(2,3,1,5)$ e $(1,1,0,5)$ representam a mesma classe, porque a diferença

$$(1,2,1,0) = (1,1,0,0) + (0,1,1,0) \in S.$$

Completando a base de S com e_3, e_4 (verifique que dá base de $\mathbb{R}^4$), a Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$) dá a base $(\bar{e}_3, \bar{e}_4)$ de $\mathbb{R}^4/S$. Para achar as coordenadas da classe de $(1,0,0,1)$, modifique o representante por elementos de S até ele cair em $[e_3, e_4]$:

$$(1,0,0,1) - (1,1,0,0) + (0,1,1,0) = (0,0,1,1) = e_3 + e_4,$$

logo $\overline{(1,0,0,1)} = \bar{e}_3 + \bar{e}_4$, com coordenadas $(1,1)$.

A técnica é a que se usa em aritmética modular: *reduza o representante*. Somar múltiplos de n até cair entre 0 e $n-1$ é o mesmo que somar elementos de S até cair num complementar escolhido. O resultado não depende das somas feitas, só do complementar.

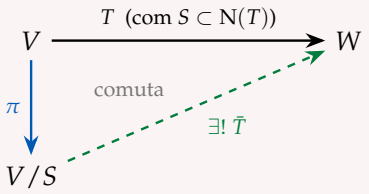
ex-quoc-c

Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente)

Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π)

A demonstração exige: Lema 5.40 (Congruência módulo S é uma relação de equivalência)

Sejam $S \subset V$ um subespaço e $T : V \to W$ linear com $S \subset \mathrm{N}(T)$. Então existe uma única $\bar{T} : V/S \to W$ linear com $\bar{T} \circ \pi = T$, a saber $\bar{T}(v+S) = T(v)$. Além disso, $\mathrm{Im}(\bar{T}) = \mathrm{Im}(T)$, e $\bar{T}$ é injetora se e somente se $S = \mathrm{N}(T)$.



$\bar{T}(v+S) = T(v)$
bem definida porque T não vê S

A propriedade universal. Uma transformação que mata S passa ao quociente de uma única maneira. O quociente é o "menor" espaço em que S é nulo: toda transformação que anula S passa por ele.

A única ideia da demonstração é a boa definição. O padrão se repete sempre que se define algo num quociente: *defina por um representante e verifique que a escolha não importa*. A hipótese $S \subset \mathrm{N}(T)$ é usada exatamente aí, e em nenhum outro lugar.

Demonstração

Boa definição: se $v+S = v'+S$, então $v - v' \in S \subset \mathrm{N}(T)$, logo $T(v) = T(v')$. *Linearidade:* $\bar{T}(\bar{u} + \lambda\bar{v}) = \bar{T}(\overline{u+\lambda v}) = T(u+\lambda v) = T(u) + \lambda T(v)$. *Unicidade:* a condição $\bar{T} \circ \pi = T$ diz exatamente $\bar{T}(v+S) = T(v)$, e π é sobrejetora, logo $\bar{T}$ fica determinada em todos os pontos. *Imagem:* $\bar{T}(v+S) = T(v)$ percorre $\mathrm{Im}(T)$. *Injetividade:* $\bar{T}(v+S) = 0 \iff v \in \mathrm{N}(T)$; logo $N(\bar{T}) = \{v+S : v \in \mathrm{N}(T)\}$, que é nulo se e somente se $\mathrm{N}(T) \subset S$, isto é, $\mathrm{N}(T) = S$.

Usado em: Exemplo 5.47 (A derivada no quociente pelas constantes), Proposição 5.55 ($(V/S)^* \cong S^0$) (dem.), Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos) (dem.), Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$) (dem.)

thm-univ

Exemplo 5.47 (A derivada no quociente pelas constantes)

Requer: Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente), Exemplo 5.44 (Polinômios módulo as constantes), Exemplo 1.62 (Núcleo e imagem da derivada)

A derivada $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ mata as constantes, logo induz $\bar{D} : \mathcal{P}_n(\mathbb{R})/\{\text{const.}\} \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $\bar{D}(p + \text{const.}) = p'$. Ela é injetora porque $\mathrm{N}(D)$ são exatamente as constantes, e sobrejetora porque D é. Sua inversa é a integral indefinida: $\bar{D}^{-1}(q) = \int q + \text{const.}$ A frase "a primitiva é definida a menos de constante" é a afirmação de que a primitiva é um elemento de um quociente.

ex-derivada-no-quociente

Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$)

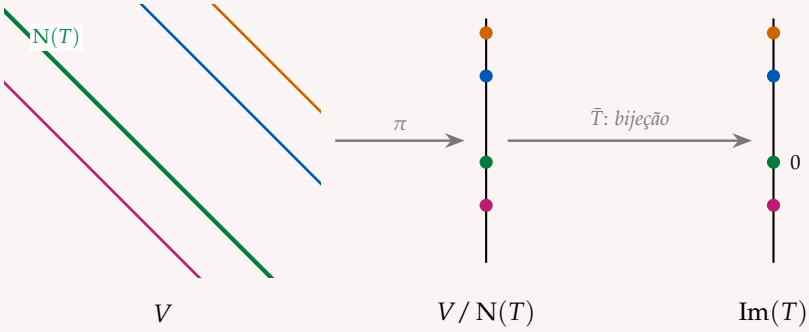
Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π), Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente)

Seja $T : V \to W$ linear. Então

$$\bar{T} : V/\mathrm{N}(T) \longrightarrow \mathrm{Im}(T), \qquad \bar{T}(v + \mathrm{N}(T)) = T(v),$$

é um isomorfismo.



O teorema do isomorfismo. π comprime cada fibra de T (cada paralela ao núcleo) num ponto; $\bar{T}$ leva esses pontos, um a um, sobre a imagem. As cores acompanham as fibras. Contar dimensões neste desenho é o teorema do núcleo e da imagem (Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente)).

A figura da Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo) é a metade esquerda desta. Lá a moral era "T é constante em cada fibra". Aqui ela vira "T é uma função das fibras, e essa função é injetora". E há uma diferença com o Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem): lá a imagem era isomorfa a *um* complementar do núcleo, escolhido; aqui ela é isomorfa ao quociente, sem escolha.

Demonstração

Aplique o Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente) com $S = \mathrm{N}(T)$: $\bar{T}$ é linear, injetora (porque $S = \mathrm{N}(T)$) e sua imagem é $\mathrm{Im}(T)$.

Usado em: Exemplo 5.50 (Matrizes módulo as de traço nulo), Exemplo 5.51 (Polinômios módulo os que se anulam em a), Exemplo 5.52 ($\mathbb{R}^3/[(1,-1,1)] \cong \mathbb{R}^2$), Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas), Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente) (dem.), Corolário 5.54 (Segundo teorema do isomorfismo) (dem.), Proposição 5.53 (Todo complementar de S é isomorfo a V/S) (dem.), Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas) (dem.)

Veja também: Proposição 1.59 (As fibras de T são translações do núcleo), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente)

`thm-iso`

Corolário 5.49 (O teorema do núcleo e da imagem, pelo quociente)

Requer: Definição 2.75 (Dimensão), Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

A demonstração exige: Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

Se $\dim V < \infty$, *então* $\dim V = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.

Demonstração

$\dim \mathrm{Im}(T) = \dim V/\mathrm{N}(T) = \dim V - \dim \mathrm{N}(T)$, pelo Teorema 5.48 (Teorema do isomor-

fismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$) e pela Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$).

Veja também: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)

`cor-nucimg`

Exemplo 5.50 (Matrizes módulo as de traço nulo)

Requer: Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Exemplo 1.64 (Núcleo e imagem do traço)

$\mathrm{tr} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é sobrejetora, logo $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})/\{\mathrm{tr} = 0\} \cong \mathbb{R}$, por $A + \{\mathrm{tr} = 0\} \mapsto \mathrm{tr}\, A$. Duas matrizes são iguais módulo as de traço nulo se e somente se têm o mesmo traço. (Pode-se mostrar que $\{\mathrm{tr} = 0\}$ é o subespaço gerado pelos comutadores $AB - BA$.)

`ex-matrizes-modulo-traco-nulo`

Exemplo 5.51 (Polinômios módulo os que se anulam em a)

Requer: Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Exemplo 1.41 (A avaliação num ponto é linear)

$\mathrm{ev}_a : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $p \mapsto p(a)$, dá $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})/\{p : p(a) = 0\} \cong \mathbb{R}$: um polinômio módulo os que se anulam em a é o seu valor em a.

`ex-polinomios-modulo-os-que-se-anulam-num-ponto`

Exemplo 5.52 ($\mathbb{R}^3/[(1,-1,1)] \cong \mathbb{R}^2$)

Requer: Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Exemplo 1.63 (Núcleo e imagem de uma $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$)

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (Exemplo 1.63 (Núcleo e imagem de uma $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$)): $N(T_A) = [(1,-1,1)]$ e $\mathrm{Im}(T_A) = \mathbb{R}^2$, logo $\mathbb{R}^3/[(1,-1,1)] \cong \mathbb{R}^2$.

`ex-r3-modulo-uma-reta-pelo-isomorfismo`

Proposição 5.53 (Todo complementar de S é isomorfo a V/S)

Requer: Definição 2.24 (Soma direta), Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π), Definição 1.66 (Isomorfismo)

A demonstração exige: Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)

Se $V = S \oplus S'$, então $\pi|_{S'} : S' \to V/S$ é um isomorfismo.

Todo complementar de S é isomorfo a V/S; o quociente é "o complementar que não depende de escolha". Em termos da figura da Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π): cada transversal corta cada paralela uma vez, e qualquer transversal serve para parametrizar as paralelas.

Demonstração

É o Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$) aplicado à projeção $P : V \to S'$ ao longo de S (Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)), que tem núcleo S e imagem

S' — ou, diretamente: $\pi(s') = 0 \iff s' \in S \cap S' = \{0\}$, e todo $v = s + s'$ tem $\pi(v) = \pi(s')$.

`prop-compl`

Corolário 5.54 (Segundo teorema do isomorfismo)

Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π), Definição 2.19 (Soma de subespaços)

A demonstração exige: Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

Para subespaços $S_1, S_2 \subset V$, $(S_1 + S_2)/S_2 \cong S_1/(S_1 \cap S_2)$. Em particular, $\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2)$.

Demonstração

Seja $T : S_1 \to (S_1 + S_2)/S_2$, $T(s_1) = s_1 + S_2$. É sobrejetora: $(s_1 + s_2) + S_2 = s_1 + S_2$. Seu núcleo é $S_1 \cap S_2$. Aplique o Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$) e conte dimensões com a Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$).

Veja também: Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)

`cor-seg`

Proposição 5.55 ($(V/S)^* \cong S^0$)

Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π), Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear), Definição 5.24 (Anulador)

A demonstração exige: Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente)

A transposta $\pi^* : (V/S)^* \to V^*$ é injetora e sua imagem é S^0. Portanto $(V/S)^* \cong S^0$, sem escolha nenhuma.
Em uma frase: *quem mata S no domínio corresponde a quem mora em S^0 no dual*. Um funcional no quociente é o mesmo que um funcional em V que não vê S. As dimensões conferem: $n - k$ dos dois lados.

Demonstração

Injetora: se $\pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi = 0$, então $\varphi = 0$, porque π é sobrejetora. *Imagem:* $\varphi \circ \pi$ se anula em $S = N(\pi)$, logo está em S^0. Reciprocamente, se $\psi \in S^0$, então $S \subset N(\psi)$, e o Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente) dá $\bar{\psi} \in (V/S)^*$ com $\bar{\psi} \circ \pi = \psi$, isto é, $\psi = \pi^*(\bar{\psi})$.

Usado em: Nota 6.42 (Dicionário: subespaços, dual e produto interno)

`prop-dualq`

Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos)

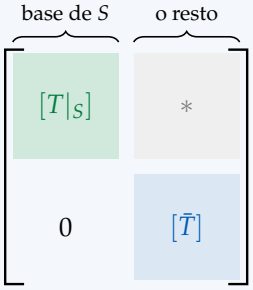
Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π), Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

A demonstração exige: Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente), Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

Seja $T : V \to V$ linear com $T(S) \subset S$. Então existe um único operador $\bar{T} : V/S \to V/S$ com $\bar{T} \circ \pi = \pi \circ T$, a saber $\bar{T}(v + S) = T(v) + S$. Se $(v_1, \ldots, v_k)$ é base de S e $B = (v_1, \ldots, v_n)$

a completa, então

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & C \end{pmatrix}, \qquad A = [T|_S]_{(v_1,\ldots,v_k)}, \quad C = [\bar{T}]_{(\bar{v}_{k+1},\ldots,\bar{v}_n)}.$$



o bloco nulo diz que S é invariante;
o bloco verde é T dentro de S;
o bloco azul é T módulo S.

A matriz de T numa base adaptada a um subespaço invariante. O quociente é o que dá sentido intrínseco ao bloco de baixo: ele não depende de como se completou a base de S, a menos de mudança de base em V/S.

Pelo determinante de matriz triangular por blocos (Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos)), $\det(T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)\det(C - \lambda I)$. Isto é, o polinômio característico de T (Definição 8.10 (Polinômio característico)) é o produto do de $T|_S$ pelo de $\bar{T}$. Exemplo mínimo: $T(x,y) = (x+y, y)$ em $\mathbb{R}^2$ com S o eixo x: $[T] = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $T|_S = 1$ e $\bar{T} = 1$.

Demonstração

$\pi \circ T : V \to V/S$ mata S, porque $T(S) \subset S = N(\pi)$; o Teorema 5.46 (Propriedade universal do quociente) dá $\bar{T}$. Para a matriz: para $j \leq k$, $T(v_j) \in S$ é combinação de $v_1, \ldots, v_k$ só, o que dá o bloco A e o zero embaixo dele. Para $j > k$, escreva $T(v_j) = \sum_{i \leq k} b_{ij} v_i + \sum_{i>k} c_{ij} v_i$ e aplique π: $\bar{T}(\bar{v}_j) = \sum_{i>k} c_{ij} \bar{v}_i$, que é a coluna de C.

Usado em: Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T), Proposição 8.27 ($1 \leq \text{mg} \leq \text{ma}$) (dem.)

Veja também: Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos), Definição 8.10 (Polinômio característico), Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T)

`prop-induz`

Exercício 5.57 (Subespaços de mesma dimensão têm quocientes isomorfos?)

Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π)

A demonstração exige: Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$), Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão)

Verdadeiro ou falso? *Se* $\dim S_1 = \dim S_2$, *então* $V/S_1 \cong V/S_2$.

Resolução

Verdadeira. $\dim V/S_i = \dim V - \dim S_i$ (Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)), e as duas dimensões são iguais. Espaços de mesma dimensão finita são isomorfos (Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão)).

`exerc-quocientes-de-mesma-dimensao`

Exercício 5.58 (Quocientes isomorfos implicam subespaços iguais?)

Requer: Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π)

A demonstração exige: Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: dim $V/S = \dim V - \dim S$), Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão)

Verdadeiro ou falso? *Se* $V/S_1 \cong V/S_2$, *então* $S_1 = S_2$.

Resolução

Falsa. Em $V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = [e_1]$ e $S_2 = [e_2]$. Os dois quocientes têm dimensão 1, logo são isomorfos, e $S_1 \neq S_2$.
A diferença entre *igual* e *isomorfo* é o ponto: a afirmação seria verdadeira com $V/S_1 = V/S_2$ como conjuntos, e não apenas isomorfos.

Veja também: Exercício 5.57 (Subespaços de mesma dimensão têm quocientes isomorfos?)

`exerc-quocientes-isomorfos-e-subespacos`

Capítulo 6

Produto interno

Ortonormalidade, Gram–Schmidt e $S^\perp$

Motivação 6.1 (A estrutura que faltava para escolher)

Requer: Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar), Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha)

Um subespaço tem muitos complementares, e não há um preferido (Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar)); e $V \cong V^*$ depende de uma escolha (Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha)). Nas duas situações o que falta é uma estrutura extra. Ela é o produto interno (Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)), que escolhe um complementar (Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$)) e um isomorfismo $V \to V^*$ (Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)).

Veja também: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)

`mot-produto-interno`

Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

Requer: Definição 1.2 (Espaço vetorial)

Um **produto interno** num espaço vetorial real V é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que é

(i) *bilinear*: linear em cada variável, com a outra fixa;

(ii) *simétrica*: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

(iii) *positiva definida*: $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$.

A **norma** de v é $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Dizemos que u e v são **ortogonais**, $u \perp v$, se $\langle u, v \rangle = 0$.

Usado em: Corolário 6.10 (Desigualdade triangular), Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 6.21 (Complemento ortogonal), Exemplo 7.5 (O produto interno como forma bilinear), Exemplo 6.7 (Bilinear e simétrica, mas não positiva), Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$), Exemplo 6.5 (Produto interno de funções: a integral do produto), Exemplo 6.4 (Produto interno de matrizes: $\operatorname{tr}(A^t B)$), Exemplo 6.6 (Um produto interno em $\mathbb{R}^2$ que não é o usual), Motivação 7.1 (Funções de vários vetores, lineares em cada um), Proposição 6.32 (Determinante de Gram), Proposição 6.8 (Pitágoras), Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações), Teorema 6.9 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz), Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta)

Veja também: Motivação 6.1 (A estrutura que faltava para escolher)

`def-pi`

Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Exemplo 1.13 (O espaço $\mathbb{R}^n$)

O produto escalar em $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = x^t y$.
É um produto interno.

Usado em: Exemplo 6.19 (Gram–Schmidt em $\mathbb{R}^3$), Exemplo 6.23 (Em $\mathbb{R}^n$, $S^\perp$ é o espaço solução de um sistema), Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial), Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais), Teorema 6.30 (Mínimos quadrados: as equações normais)

`ex-produto-escalar`

Exemplo 6.4 (Produto interno de matrizes: $\mathrm{tr}(A^tB)$)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Exemplo 1.43 (O traço é linear)

Matrizes: em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, é um produto interno $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^tB) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$. É o produto escalar de $\mathbb{R}^{mn}$, com as entradas listadas.

Usado em: Exemplo 6.24 (Matrizes simétricas e antissimétricas são ortogonais)

`ex-produto-interno-de-matrizes`

Exemplo 6.5 (Produto interno de funções: a integral do produto)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Exemplo 1.15 (Polinômios), Exemplo 1.21 (Funções de classe C^k)

Funções: em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ou em $C^0([-1,1])$, é um produto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. A positividade: se $f \neq 0$ é contínua, f^2 é contínua, ≥ 0 e positiva num intervalo, logo tem integral positiva.

Usado em: Exemplo 6.12 (O ângulo entre 1 e t^2), Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre)

`ex-produto-interno-de-funcoes`

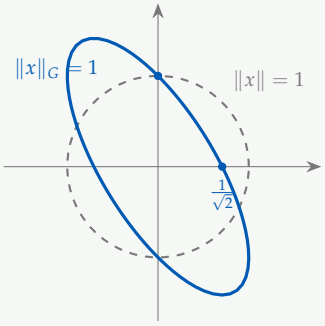
Exemplo 6.6 (Um produto interno em $\mathbb{R}^2$ que não é o usual)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

Um produto interno em $\mathbb{R}^2$ *que não é o usual*:

$$\langle x, y\rangle_G = x^tGy, \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{isto é,} \quad \langle x, x\rangle_G = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2.$$

A última forma mostra que é positivo para $x \neq 0$.



$\|x\|_G^2 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$
a "esfera unitária" é uma elipse;
e_1 *tem norma* $\sqrt{2}$, e_2 *tem norma* 1,
e $\langle e_1, e_2\rangle_G = 1$*: não são ortogonais*

Os vetores de norma 1 para o produto escalar (círculo tracejado) e para $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ (elipse azul). Mudar o produto interno muda quem tem comprimento 1 e quem é perpendicular a quem. Toda elipse centrada na origem é a esfera unitária de algum produto interno (Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações)).

A elipse corta os eixos em $\pm 1/\sqrt{2}$ (eixo x) e ± 1 (eixo y), e está inclinada porque e_1 e e_2 não são ortogonais para G. Todo produto interno em $\mathbb{R}^n$ é da forma $x^t G y$, com G simétrica.

Veja também: Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações)

`ex-produto-interno-nao-usual-em-r2`

Exemplo 6.7 (Bilinear e simétrica, mas não positiva)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

Não-exemplo: $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2$ em $\mathbb{R}^2$ é bilinear e simétrica, mas $\langle e_2, e_2 \rangle = -1$, e $\langle (1,1), (1,1) \rangle = 0$.

`ex-forma-bilinear-nao-positiva`

Proposição 6.8 (Pitágoras)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

Se $u \perp v$, então $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Em geral, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$.

Demonstração

Expanda $\langle u+v, u+v \rangle$ por bilinearidade e use a simetria.

Usado em: Corolário 6.10 (Desigualdade triangular) (dem.), Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação) (dem.), Teorema 6.9 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz) (dem.)

`prop-pit`

Teorema 6.9 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

A demonstração exige: Proposição 6.8 (Pitágoras)

Para todos $u, v \in V$,

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

com igualdade se e somente se u e v são linearmente dependentes.

Demonstração

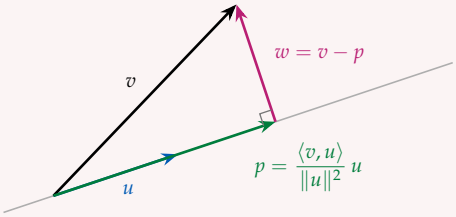
Se $u = 0$, os dois lados são nulos e u, v são LD. Suponha $u \neq 0$ e escreva

$$v = \underbrace{\frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u}_{p} + \underbrace{\left(v - \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2} u \right)}_{w}.$$

Então $\langle w, u \rangle = \langle v, u \rangle - \langle v, u \rangle = 0$, logo $w \perp p$, e por Pitágoras

$$\|v\|^2 = \|p\|^2 + \|w\|^2 \geq \|p\|^2 = \frac{\langle v, u \rangle^2}{\|u\|^2}.$$

Multiplicando por $\|u\|^2$ e tirando a raiz obtém-se a desigualdade. A igualdade vale se e somente se $w = 0$, isto é, v é múltiplo de u.



A componente de v na direção de u. O vetor p é a "sombra" de v sobre a reta de u, e o que sobra, w, é perpendicular a u. Cauchy–Schwarz diz que a sombra não é mais comprida que o vetor; Gram–Schmidt consiste em ficar com w e jogar p fora.

A demonstração usual (o discriminante do polinômio $t \mapsto \|u + tv\|^2$) é igualmente curta. A escolhida aqui tem a vantagem de introduzir a decomposição $v = p + w$ da figura, que é o passo de Gram–Schmidt (Teorema 6.17 (Gram–Schmidt)) e o caso unidimensional da projeção ortogonal (Definição 6.26 (Projeção ortogonal)).

Usado em: Definição 6.11 (Ângulo entre dois vetores), Corolário 6.10 (Desigualdade triangular) (dem.)

Veja também: Teorema 6.17 (Gram–Schmidt), Definição 6.26 (Projeção ortogonal)

`thm-cs`

Corolário 6.10 (Desigualdade triangular)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

A demonstração exige: Teorema 6.9 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz), Proposição 6.8 (Pitágoras)

$\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triangular).

Demonstração

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$.

`cor-triang`

Definição 6.11 (Ângulo entre dois vetores)

Requer: Teorema 6.9 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz)

Para $u, v \neq 0$, o **ângulo** entre u e v é o único $\theta \in [0, \pi]$ com

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}.$$

Cauchy–Schwarz é exatamente o que garante que o lado direito está em $[-1, 1]$.

Usado em: Exemplo 6.12 (O ângulo entre 1 e t^2)

`def-angulo`

Exemplo 6.12 (O ângulo entre 1 e t^2)

Requer: Definição 6.11 (Ângulo entre dois vetores), Exemplo 6.5 (Produto interno de funções: a integral do produto)

Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} pq$: $1 \perp t$, porque $\int_{-1}^{1} t\,dt = 0$. E o ângulo entre 1 e t^2

satisfaz

$$\cos\theta = \frac{\int_{-1}^{1} t^2}{\sqrt{\int_{-1}^{1} 1}\sqrt{\int_{-1}^{1} t^4}} = \frac{2/3}{\sqrt{2}\sqrt{2/5}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0{,}75,$$

isto é, $\theta \approx 42°$. Funções têm ângulos entre si, e isso é útil: "t^2 é parecido com 1" ganha um número.

ex-angfun

Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

Uma lista $(u_1, \ldots, u_k)$ é **ortogonal** se $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ para $i \neq j$, e **ortonormal** se, além disso, $\|u_i\| = 1$ para todo i; isto é, $\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}$.

Usado em: Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal), Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais), Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais), Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal), Proposição 6.27 (Fórmula da projeção ortogonal), Proposição 6.14 (Vetores ortogonais não nulos são LI), Teorema 6.17 (Gram–Schmidt), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)

def-on

Proposição 6.14 (Vetores ortogonais não nulos são LI)

Requer: Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

Uma lista ortogonal de vetores não nulos é LI.

Demonstração

Se $\sum_j a_j u_j = 0$, faça o produto interno com u_i: $a_i\|u_i\|^2 = 0$, logo $a_i = 0$.

prop-onli

Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal)

Requer: Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 2.66 (Coordenadas numa base)

Seja $(u_1, \ldots, u_n)$ base ortonormal de V. Então, para todos $v, w \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle\, u_i \qquad \text{e} \qquad \langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle \langle w, u_i\rangle.$$

Isto é: as coordenadas são produtos internos, e numa base ortonormal o produto interno de V vira o produto escalar das coordenadas.

Compare com o Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas): lá, as coordenadas eram os funcionais da base dual, $v_i^*(v)$, e calculá-los exigia inverter uma matriz (Proposição 5.11 (Cálculo da base dual em $\mathbb{R}^n$)). Aqui $v_i^* = \langle \cdot, u_i\rangle$, e o cálculo é um produto interno. É a primeira aparição do isomorfismo $V \cong V^*$ dado pelo produto interno (Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)).

Demonstração

Escreva $v = \sum_j a_j u_j$ e faça o produto interno com u_i: $\langle v, u_i \rangle = a_i$. A segunda fórmula sai expandindo $\langle \sum_i a_i u_i, \sum_j b_j u_j \rangle$ por bilinearidade.

Usado em: Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais) (dem.), Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais) (dem.), Proposição 6.32 (Determinante de Gram) (dem.), Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor) (dem.)

Veja também: Teorema 5.9 (A base dual dá as coordenadas), Proposição 5.11 (Cálculo da base dual em $\mathbb{R}^n$), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno), Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal)

`prop-coord`

Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais)

Requer: Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 3.12 (Matriz de mudança de base)

A demonstração exige: Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal)

Sejam B e B' bases ortonormais de V e $Q = [I]_{BB'}$. Então $Q^t Q = I$, isto é, $Q^{-1} = Q^t$. Uma matriz com $Q^t Q = I$ chama-se **ortogonal**. Suas colunas são uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. As rotações de $\mathbb{R}^2$ são o exemplo principal.

Demonstração

A coluna j de Q é $[u'_j]_B$. Pela Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal), o produto escalar das colunas i e j é $\langle u'_i, u'_j \rangle = \delta_{ij}$, que é a entrada (i,j) de $Q^t Q$.

Usado em: Exemplo 6.41 (Operadores ortogonais), Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais)

`cor-ortog`

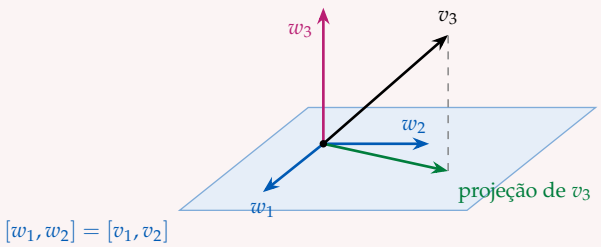
Teorema 6.17 (Gram–Schmidt)

Requer: Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Definição 2.17 (Subespaço gerado)

Seja $(v_1, \dots, v_n)$ uma lista LI em V. Defina recursivamente

$$w_1 = v_1, \qquad w_k = v_k - \sum_{j<k} \frac{\langle v_k, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j \quad (k \geq 2).$$

Então $(w_1, \dots, w_n)$ é ortogonal, com $w_k \neq 0$, e $[w_1, \dots, w_k] = [v_1, \dots, v_k]$ para todo k. Normalizando, $u_k = w_k / \|w_k\|$ dá uma lista ortonormal com a mesma propriedade.



O terceiro passo de Gram–Schmidt. De v_3 tira-se a sua componente no plano dos anteriores (verde), que é $\sum_{j<3} \frac{\langle v_3, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j$; o que sobra, transportado para a origem, é w_3 (rosa), perpendicular ao plano. Em cada passo o subespaço gerado cresce de uma dimensão e não muda de lugar.

A mudança de base $(v_i) \to (w_i)$ é triangular; daí sai a decomposição $A = QR$.

Demonstração

Indução em k. Para $k = 1$ é imediato ($w_1 = v_1 \neq 0$). Suponha que $w_1, \ldots, w_{k-1}$ são ortogonais, não nulos, e $[w_1, \ldots, w_{k-1}] = [v_1, \ldots, v_{k-1}]$.

Ortogonalidade: para $i < k$, usando $\langle w_j, w_i \rangle = 0$ para $j \neq i$,

$$\langle w_k, w_i \rangle = \langle v_k, w_i \rangle - \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \|w_i\|^2 = 0.$$

$w_k \neq 0$: se fosse, v_k estaria em $[w_1, \ldots, w_{k-1}] = [v_1, \ldots, v_{k-1}]$, contra a independência dos v. *Subespaços:* $w_k \in v_k + [w_1, \ldots, w_{k-1}]$, logo $[w_1, \ldots, w_k] = [w_1, \ldots, w_{k-1}, v_k] = [v_1, \ldots, v_k]$.

Usado em: Exemplo 6.19 (Gram–Schmidt em $\mathbb{R}^3$), Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre), Exemplo 9.8 (Diagonalização ortogonal com um autovalor duplo), Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal) (dem.)

Veja também: Teorema 6.9 (Desigualdade de Cauchy–Schwarz)

`thm-gs`

Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal)

Requer: Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Teorema 6.17 (Gram–Schmidt), Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

Todo espaço com produto interno de dimensão finita tem base ortonormal, e toda lista ortonormal se completa a uma base ortonormal.

Demonstração

Aplique o teorema a uma base. Para a segunda afirmação, complete a lista ortonormal $(u_1, \ldots, u_k)$ a uma base qualquer (Teorema 2.79 (Teorema do completamento)) e aplique o teorema: os k primeiros vetores não mudam, porque já são ortonormais.

Usado em: Proposição 6.32 (Determinante de Gram) (dem.), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^{\perp}$) (dem.)

`cor-existe`

Exemplo 6.19 (Gram–Schmidt em $\mathbb{R}^3$)

Requer: Teorema 6.17 (Gram–Schmidt), Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$)

Em $\mathbb{R}^3$ com o produto escalar, $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$:

$$\begin{aligned} w_1 &= (1,1,0), \\ w_2 &= (1,0,1) - \tfrac{1}{2}(1,1,0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right), \\ w_3 &= (0,1,1) - \tfrac{1}{2}(1,1,0) - \frac{1/2}{3/2}\left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right) = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Confira: $\langle w_3, w_1 \rangle = 0$ e $\langle w_3, w_2 \rangle = -\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} = 0$.

`ex-gsr3`

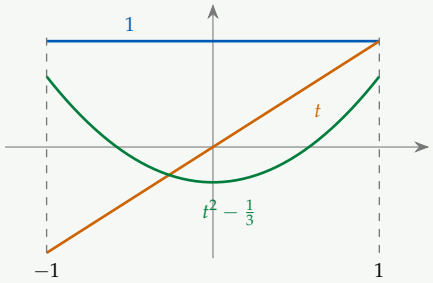
Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre)

Requer: Teorema 6.17 (Gram–Schmidt), Exemplo 6.5 (Produto interno de funções: a integral do produto)

Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} pq$, aplique Gram–Schmidt a $(1, t, t^2)$. As integrais necessárias são $\int_{-1}^{1} t^k\,dt = \frac{2}{k+1}$ para k par e 0 para k ímpar.

$$\begin{aligned} w_1 &= 1, & \|w_1\|^2 &= 2,\\ w_2 &= t - \tfrac{\langle t,1\rangle}{2}\cdot 1 = t, & \|w_2\|^2 &= \tfrac{2}{3},\\ w_3 &= t^2 - \tfrac{\langle t^2,1\rangle}{2}\cdot 1 - \tfrac{\langle t^2,t\rangle}{2/3}\,t = t^2 - \tfrac{1}{3}, & \|w_3\|^2 &= \tfrac{2}{5} - \tfrac{4}{9} + \tfrac{2}{9} = \tfrac{8}{45}. \end{aligned}$$

A base ortonormal é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\ \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)\right)$.



Os três primeiros polinômios de Legendre (sem normalizar). A ortogonalidade se vê nas áreas: $t^2 - \frac{1}{3}$ tem área total nula em $[-1, 1]$ (é ortogonal a 1), e é par enquanto t é ímpar (são ortogonais). O $\frac{1}{3}$ é exatamente o deslocamento que zera a área.

Usado em: Exemplo 6.25 (O complemento ortogonal das constantes em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$), Exemplo 6.29 (A melhor aproximação de t^3 por polinômios de grau ≤ 1)

`ex-legendre`

Definição 6.21 (Complemento ortogonal)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Definição 2.2 (Subespaço vetorial)

Seja $S \subset V$ um subespaço. O **complemento ortogonal** de S é

$$S^{\perp} = \{v \in V : \ \langle v, s\rangle = 0 \text{ para todo } s \in S\}.$$

Usado em: Exemplo 6.23 (Em $\mathbb{R}^n$, $S^{\perp}$ é o espaço solução de um sistema), Exemplo 6.25 (O complemento ortogonal das constantes em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$), Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^{\perp}$ também é), Proposição 6.37 (Núcleo e imagem da adjunta), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^{\perp}$), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)

`def-perp`

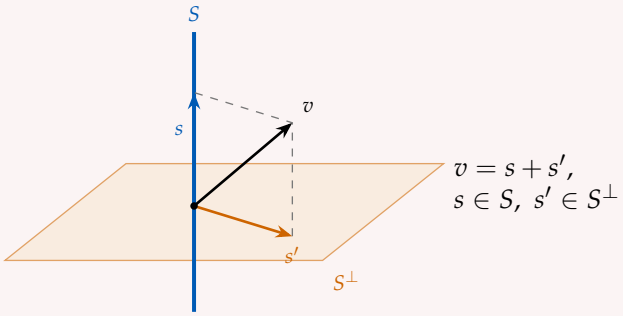
Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^{\perp}$)

Requer: Definição 6.21 (Complemento ortogonal), Definição 2.24 (Soma direta), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal), Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam)

Seja V de dimensão finita com produto interno e S um subespaço. Então $S^\perp$ é subespaço,

$$V = S \oplus S^\perp, \qquad \dim S^\perp = \dim V - \dim S, \qquad (S^\perp)^\perp = S.$$



Uma reta S e o plano $S^\perp$ em $\mathbb{R}^3$. Todo vetor se decompõe de modo único em uma parte em S e uma parte perpendicular a S. Dentre os muitos complementares de S (Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar)), o produto interno escolhe este.

Demonstração

$S^\perp$ é subespaço pela linearidade na primeira variável. *Interseção:* se $v \in S \cap S^\perp$, então $\langle v, v\rangle = 0$ e $v = 0$. *Soma:* seja $(u_1, \dots, u_k)$ base ortonormal de S, completada a uma base ortonormal $(u_1, \dots, u_n)$ de V (Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal)). Os vetores $u_{k+1}, \dots, u_n$ são ortogonais a $u_1, \dots, u_k$, logo a S: estão em $S^\perp$. Então $V = [u_1, \dots, u_n] \subset S + S^\perp$. Isso dá $V = S \oplus S^\perp$ e a fórmula da dimensão (Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam)). *Duplo perp:* $S \subset (S^\perp)^\perp$ pela definição, e as dimensões são iguais: $n - (n-k) = k$.

Usado em: Definição 6.26 (Projeção ortogonal), Exemplo 6.24 (Matrizes simétricas e antissimétricas são ortogonais), Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas), Proposição 9.7 (Um autovetor real pelo máximo de $\langle Tv, v\rangle$) (dem.), Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato) (dem.), Proposição 6.37 (Núcleo e imagem da adjunta) (dem.), Teorema 9.5 (Teorema espectral) (dem.)

Veja também: Corolário 2.83 (Todo subespaço tem complementar), Motivação 6.1 (A estrutura que faltava para escolher)

`thm-perp`

Exemplo 6.23 (Em $\mathbb{R}^n$, $S^\perp$ é o espaço solução de um sistema)

Requer: Definição 6.21 (Complemento ortogonal), Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$)

Em $\mathbb{R}^3$, $[(1,1,1)]^\perp$ é o plano $x + y + z = 0$. Em geral, em $\mathbb{R}^n$ com o produto escalar, $[u_1, \dots, u_k]^\perp$ é o espaço solução do sistema cujas linhas são os u_i — o mesmo sistema que calcula o anulador (Nota 5.27 (O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações)).
Não é coincidência: o produto interno identifica V com V^* (Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)), e essa identificação leva $S^\perp$ em S^0. Compare as fórmulas: $\dim S^\perp = n - \dim S = \dim S^0$ e $(S^\perp)^\perp = S = (S^0)^0$.

Veja também: Nota 5.27 (O anulador em $\mathbb{R}^n$ são as equações), Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)

`ex-perp-a`

Exemplo 6.24 (Matrizes simétricas e antissimétricas são ortogonais)

Requer: Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$), Exemplo 6.4 (Produto interno de matrizes: $\operatorname{tr}(A^t B)$), Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Exemplo 2.77 (Dimensão das matrizes simétricas e das antissimétricas)

Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$, simétricas e antissimétricas são ortogonais: se $S^t = S$ e $A^t = -A$,

$$\langle S, A\rangle = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}\left((SA)^t\right) = \operatorname{tr}(A^t S^t) = -\operatorname{tr}(AS) = -\operatorname{tr}(SA),$$

logo $\langle S, A\rangle = 0$. Como $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$ (Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)) e as dimensões somam n^2, $\mathrm{Sim}^\perp = \mathcal{A}$: essa decomposição é ortogonal.

ex-perp-b

Exemplo 6.25 (O complemento ortogonal das constantes em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$)

Requer: Definição 6.21 (Complemento ortogonal), Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre)

Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ com $\int_{-1}^{1}$: $[1]^\perp = \{p : \int_{-1}^{1} p = 0\} = [t,\ t^2 - \frac{1}{3}]$, pelo Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre).

ex-perp-c

Projeção, mínimos quadrados, Riesz e adjunta

Definição 6.26 (Projeção ortogonal)

Requer: Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$), Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)

Seja $S \subset V$ um subespaço. A **projeção ortogonal** sobre S é a projeção $P_S : V \to V$ associada a $V = S \oplus S^\perp$: se $v = s + s'$ com $s \in S$ e $s' \in S^\perp$, então $P_S v = s$.
Pela Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta), P_S é linear, $P_S^2 = P_S$, $\operatorname{Im}(P_S) = S$, $N(P_S) = S^\perp$ e $I - P_S = P_{S^\perp}$.

Usado em: Exemplo 6.39 (Projeções ortogonais são auto-adjuntas), Proposição 6.27 (Fórmula da projeção ortogonal), Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação)

def-proj

Proposição 6.27 (Fórmula da projeção ortogonal)

Requer: Definição 6.26 (Projeção ortogonal), Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais)

Se $(u_1, \ldots, u_k)$ é base ortonormal de S,

$$P_S v = \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle\, u_i.$$

Mais geralmente, $P_S v$ é o único $s \in S$ com $v - s \perp S$.

Demonstração

Ponha $s = \sum_i \langle v, u_i\rangle u_i \in S$. Para cada j, $\langle v - s, u_j\rangle = \langle v, u_j\rangle - \langle v, u_j\rangle = 0$, logo $v - s \in S^\perp$ e $v = s + (v - s)$ é a decomposição de v. A unicidade é a da soma direta.

Usado em: Exemplo 6.29 (A melhor aproximação de t^3 por polinômios de grau ≤ 1), Teorema 6.30 (Mínimos quadrados: as equações normais) (dem.)

prop-formula

Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação)

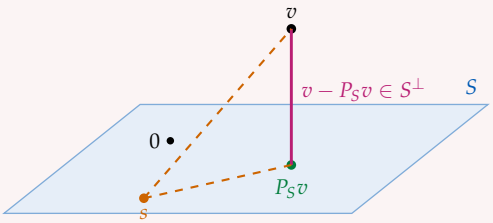
Requer: Definição 6.26 (Projeção ortogonal)

A demonstração exige: Proposição 6.8 (Pitágoras)

Para todo $s \in S$ com $s \neq P_S v$,

$$\|v - P_S v\| < \|v - s\|.$$

Isto é: $P_S v$ é o único ponto de S mais próximo de v.



$$\|v - s\|^2 = \|v - P_S v\|^2 + \|P_S v - s\|^2$$

(Pitágoras no triângulo de vértices v, $P_S v$, s)

O pé da perpendicular é o ponto mais próximo. Para qualquer outro $s \in S$, o triângulo v, $P_S v$, s tem ângulo reto em $P_S v$, e a hipotenusa $\|v - s\|$ é maior que o cateto $\|v - P_S v\|$. É a demonstração inteira do teorema.

Em uma frase: *o erro da melhor aproximação é perpendicular ao subespaço.*

Demonstração

Escreva $v - s = (v - P_S v) + (P_S v - s)$. A primeira parcela está em $S^\perp$ e a segunda em S; por Pitágoras,

$$\|v - s\|^2 = \|v - P_S v\|^2 + \|P_S v - s\|^2 > \|v - P_S v\|^2,$$

porque $P_S v - s \neq 0$.

Usado em: Exemplo 6.29 (A melhor aproximação de t^3 por polinômios de grau ≤ 1), Teorema 6.30 (Mínimos quadrados: as equações normais) (dem.)

`thm-aprox`

Exemplo 6.29 (A melhor aproximação de t^3 por polinômios de grau ≤ 1)

Requer: Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação), Proposição 6.27 (Fórmula da projeção ortogonal), Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre)

Em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ com $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} pq$, a melhor aproximação de t^3 por polinômios de grau ≤ 1. Pelo Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre), $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\right)$ é base ortonormal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$. Como $\langle t^3, 1\rangle = 0$ e $\langle t^3, t\rangle = \frac{2}{5}$,

$$P_{P_1}(t^3) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{2}{5}\, t = \tfrac{3}{5}\, t.$$

Confira que o erro $t^3 - \frac{3}{5}t$ é perpendicular a P_1: $\int_{-1}^{1}(t^3 - \frac{3}{5}t)\, dt = 0$ (é ímpar) e $\int_{-1}^{1}(t^4 - \frac{3}{5}t^2)\, dt = \frac{2}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = 0$.

A resposta não é a reta tangente nem a reta pelos extremos: é a reta que minimiza o erro quadrático médio em $[-1, 1]$. Mudar o produto interno (por exemplo, integrar em $[0, 1]$) muda a resposta. E $t^3 - \frac{3}{5}t$ é, a menos de múltiplo, o quarto polinômio de Legendre: é o que Gram–Schmidt daria no passo seguinte do Exemplo 6.20 (Polinômios de Legendre).

`ex-t3`

Teorema 6.30 (Mínimos quadrados: as equações normais)

Requer: Definição 3.19 (Sistema linear), Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$)

A demonstração exige: Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação), Proposição 6.27 (Fórmula da projeção ortogonal)

Um sistema $AX = b$ sem solução (em geral, com mais equações que incógnitas) pede a pergunta seguinte: qual X torna AX o mais próximo possível de b?

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$, com o produto escalar. X_0 minimiza $\|AX - b\|$ se e somente se

$$A^t A\, X_0 = A^t b \qquad \text{(equações normais).}$$

Se as colunas de A são LI, A^tA é invertível e a solução é única.

Demonstração

Os vetores AX percorrem $S = \mathrm{Im}(T_A)$. Pelo Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação), X_0 minimiza se e somente se $AX_0 = P_S b$, e pela Proposição 6.27 (Fórmula da projeção ortogonal) isso equivale a $b - AX_0 \perp S$. Como S é gerado pelas colunas a_j de A, isso diz $a_j^t(b - AX_0) = 0$ para todo j, isto é, $A^t(b - AX_0) = 0$.

Se as colunas são LI e $A^tAX = 0$, então $\|AX\|^2 = X^tA^tAX = 0$, logo $AX = 0$ e $X = 0$: A^tA é injetora, logo invertível.

Outra dedução, por cálculo diferencial. Esta dedução não usa projeções. Seja

$$f(X) = \|AX - b\|^2 = X^tA^tAX - 2b^tAX + b^tb, \qquad X \in \mathbb{R}^n.$$

É uma função quadrática de n variáveis. Seu gradiente é $\nabla f(X) = 2A^tAX - 2A^tb$ (derive termo a termo, usando que A^tA é simétrica). Num ponto de mínimo o gradiente se anula: $A^tAX_0 = A^tb$. Para ver que todo zero do gradiente é mínimo, expanda em torno de X_0: para $H \in \mathbb{R}^n$,

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \nabla f(X_0)^tH + H^tA^tAH = f(X_0) + \|AH\|^2 \geq f(X_0).$$

A igualdade só vale quando $AH = 0$; com colunas LI, só para $H = 0$.

O que esta rota esconde: que AX_0 é a projeção ortogonal de b, e que o resíduo é perpendicular às colunas — que é o que torna a resposta geométrica e reaproveitável.

Usado em: Exemplo 6.31 (A reta que melhor ajusta quatro pontos)

`thm-mq`

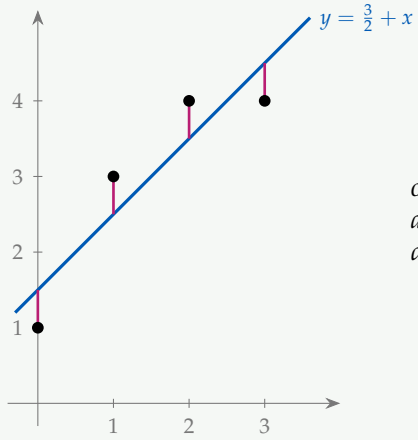
Exemplo 6.31 (A reta que melhor ajusta quatro pontos)

Requer: Teorema 6.30 (Mínimos quadrados: as equações normais)

A reta $y = a + bx$ que melhor ajusta $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$. O sistema impossível é $a + bx_i = y_i$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad A^tA = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad A^tb = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

As equações normais $4a + 6b = 12$, $6a + 14b = 23$ dão $a = \frac{3}{2}$, $b = 1$: a reta $y = \frac{3}{2} + x$. Os resíduos $y_i - (a + bx_i)$ são $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$; eles são perpendiculares às duas colunas de A: somam zero, e $0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$.



os segmentos rosa são os resíduos;
a reta minimiza a soma
dos seus quadrados

O ajuste por mínimos quadrados. Em $\mathbb{R}^4$, o vetor dos quatro resíduos é $b - AX_0$, perpendicular ao plano $\mathrm{Im}(T_A)$ — a figura do Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação) com $S = \mathrm{Im}(T_A)$ e $v = b$. Aqui ela aparece desenhada no plano dos dados, onde a perpendicularidade não se vê.

Há duas figuras para o mesmo problema: a dos dados, que é a que se desenha num relatório, e a de $\mathbb{R}^4$ (a do Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação)), que é a que explica a solução. A condição "resíduos somam zero" é a perpendicularidade à coluna de 1's; ela diz que a reta passa pelo ponto médio $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{3}{2}, 3)$.

Veja também: Teorema 6.28 (A projeção ortogonal é a melhor aproximação)

`ex-reta`

Proposição 6.32 (Determinante de Gram)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Definição 2.44 (Independência e dependência linear), Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

A demonstração exige: Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal), Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal), Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$), Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$), Teorema 4.11 ($\det A \neq 0$ equivale a A invertível)

Sejam $v_1, \ldots, v_k \in V$ e $\Gamma = (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j}$. Então $\det \Gamma \geq 0$, com igualdade se e somente se os v_i são LD.

Demonstração

Seja $U = [v_1, \ldots, v_k]$, $d = \dim U$, e tome uma base ortonormal de U (Corolário 6.18 (Existência de base ortonormal)). Seja M a matriz $d \times k$ cujas colunas são as coordenadas dos v_i nessa base. Pela Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal), $\Gamma = M^t M$. Se os v_i são LD, existe $X \neq 0$ com $MX = 0$, logo $\Gamma X = 0$ e $\det \Gamma = 0$. Se são LI, então $d = k$, M é quadrada e invertível, e $\det \Gamma = \det(M^t) \det M = (\det M)^2 > 0$.

Usado em: Exemplo 6.33 (A matriz de Gram de três vetores de $\mathbb{R}^3$)

`prop-gram`

Exemplo 6.33 (A matriz de Gram de três vetores de $\mathbb{R}^3$)

Requer: Proposição 6.32 (Determinante de Gram)

Para $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ em $\mathbb{R}^3$:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det \Gamma = 4 = 2^2,$$

e 2 é o determinante da matriz P do Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo), cujas colunas são esses vetores. Pela Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal), $|\det P| = 2$ é o volume do paralelepípedo que eles geram: $\sqrt{\det \Gamma}$ é esse volume, calculado só com produtos internos.

Veja também: Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal), Exemplo 3.17 (Mudança de base em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$: um exemplo completo)

ex-gram

Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)

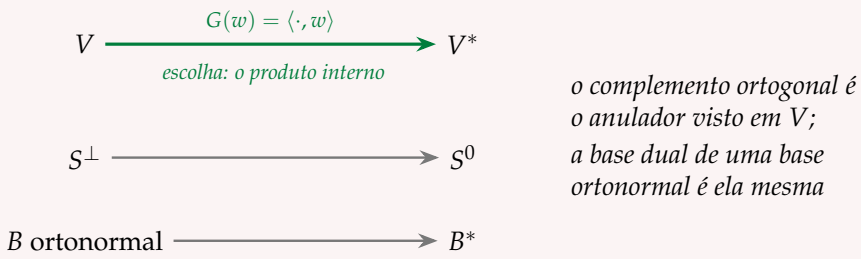
Requer: Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 5.8 (Base dual), Definição 6.21 (Complemento ortogonal), Definição 5.24 (Anulador), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)

Seja V de dimensão finita com produto interno. A aplicação

$$G : V \to V^*, \qquad G(w) = \langle \cdot, w \rangle$$

é um isomorfismo. Isto é: todo funcional $\varphi \in V^*$ é da forma $\varphi = \langle \cdot, w \rangle$ para um único $w \in V$. Além disso, uma base B é ortonormal se e somente se $G(B) = B^*$, e $G(S^\perp) = S^0$ para todo subespaço S.



O produto interno é uma maneira de escolher o isomorfismo $V \to V^*$ que não existe de graça (Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha)). Por ele, $S^\perp$ corresponde a S^0 e as bases ortonormais são as que coincidem com as suas duais.

O teorema responde à pergunta do Exemplo 6.23 (Em $\mathbb{R}^n$, $S^\perp$ é o espaço solução de um sistema): $S^\perp$ e S^0 têm as mesmas fórmulas porque $G(S^\perp) = S^0$, e G é isomorfismo. $V \cong V^*$ exige uma escolha, e um produto interno *é* uma escolha (mais econômica do que uma base, porque muitas bases — todas as ortonormais — dão o mesmo isomorfismo). Apesar disso, o anulador é o objeto mais básico: ele não depende de produto interno nenhum.

Demonstração

G é linear (linearidade na segunda variável). Se $G(w) = 0$, então $\langle w, w \rangle = 0$ e $w = 0$: G é injetora, e como $\dim V^* = \dim V$, é isomorfismo. Para $B = (u_1, \ldots, u_n)$: $G(u_j)(u_i) = \langle u_i, u_j \rangle$, que é δ_{ij} para todos i, j exatamente quando B é ortonormal; e δ_{ij} é a relação que define u_j^*. Finalmente, $G(w) \in S^0 \iff \langle s, w \rangle = 0$ para todo $s \in S \iff w \in S^\perp$.

Usado em: Nota 6.42 (Dicionário: subespaços, dual e produto interno), Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta) (dem.)

Veja também: Nota 5.20 ($V \cong V^*$ depende de escolha), Exemplo 6.23 (Em $\mathbb{R}^n$, $S^\perp$ é o espaço solução de um sistema), Motivação 6.1 (A estrutura que faltava para escolher)

`thm-riesz`

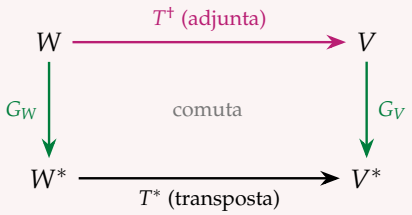
Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta)

Requer: Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade), Definição 2.75 (Dimensão), Definição 1.36 (Transformação linear)

A demonstração exige: Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno), Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear)

Sejam V e W com produto interno, de dimensão finita, e $T : V \to W$ linear. Existe uma única $T^\dagger : W \to V$ linear com

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^\dagger(w)\rangle_V \qquad \text{para todos } v \in V,\ w \in W.$$



$G_V \circ T^\dagger = T^* \circ G_W$
a adjunta é a transposta lida através dos produtos internos

A adjunta e a transposta. A transposta (embaixo) existe sempre e anda entre duais. A adjunta (em cima) exige produtos internos e anda entre os próprios espaços; ela é a única seta de cima que faz o quadrado comutar.

Demonstração

Fixe w. A função $v \mapsto \langle T(v), w\rangle_W$ é um funcional em V (é $T^*(G_W(w))$, com T^* a transposta, Definição 5.15 (Transposta de uma transformação linear)). Pelo Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno), existe um único vetor — chame-o $T^\dagger(w)$ — com $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T^\dagger(w)\rangle$ para todo v. Em fórmula: $T^\dagger = G_V^{-1} \circ T^* \circ G_W$, que é linear por ser composta de lineares.

Usado em: Exemplo 6.41 (Operadores ortogonais), Nota 6.42 (Dicionário: subespaços, dual e produto interno), Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais), Proposição 6.37 (Núcleo e imagem da adjunta)

`thm-existencia-da-adjunta`

Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais)

Requer: Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta), Definição 6.13 (Listas ortogonais e ortonormais), Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

A demonstração exige: Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal)

Sejam B e C bases ortonormais de V e W. Então $[T^\dagger]_{BC} = \big([T]_{CB}\big)^t$. Para bases quaisquer, isso é falso.

Demonstração

Se $B = (v_j)$ e $C = (w_i)$ são ortonormais, a entrada (i, j) de $[T]_{CB}$ é $\langle T(v_j), w_i\rangle$ (Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal)), e a entrada (j, i) de $[T^\dagger]_{BC}$ é $\langle T^\dagger(w_i), v_j\rangle = \langle v_j, T^\dagger(w_i)\rangle =$

$\langle T(v_j), w_i\rangle$.

Contra-exemplo com base não ortonormal: em $\mathbb{R}^2$ com $\langle x,y\rangle_G = x^tGy$, $G = \operatorname{diag}(1,2)$, a adjunta de $X \mapsto AX$ é $X \mapsto G^{-1}A^tG\,X$ (verifique: $(AX)^tGY = X^tG(G^{-1}A^tGY)$). Para $A = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ isso dá $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1/2&0\end{smallmatrix}\right) \neq A^t$. A base canônica não é ortonormal para $\langle\cdot,\cdot\rangle_G$.

Usado em: Definição 6.38 (Operador auto-adjunto), Exemplo 6.40 (A derivada nos polinômios trigonométricos é antiadjunta)

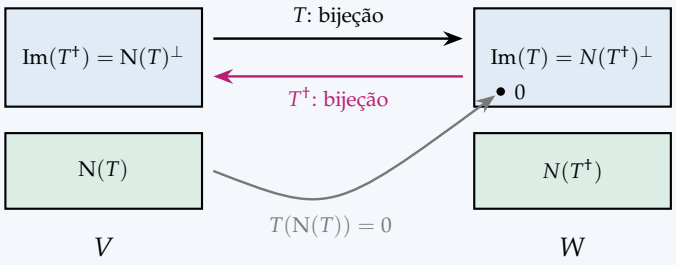
`prop-adjmat`

Proposição 6.37 (Núcleo e imagem da adjunta)

Requer: Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta), Definição 6.21 (Complemento ortogonal)

A demonstração exige: Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$)

$N(T^\dagger) = \operatorname{Im}(T)^\perp$ *e* $\operatorname{Im}(T^\dagger) = \mathrm{N}(T)^\perp$. *Portanto* $V = \mathrm{N}(T) \oplus \operatorname{Im}(T^\dagger)$ *e* $W = \operatorname{Im}(T) \oplus N(T^\dagger)$, *somas ortogonais.*



Os quatro subespaços, agora com $\perp$ *(compare com a figura do Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear), que usa* ^{0} *e os duais). V se parte ortogonalmente em núcleo e imagem da adjunta, W em imagem e núcleo da adjunta; T esmaga o núcleo e leva o complemento ortogonal dele bijetivamente sobre a imagem.*

A figura é a do Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), com uma diferença: lá o complementar do núcleo era um qualquer; aqui ele é o ortogonal, e é a imagem de $T^\dagger$. Com a Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais), isto é "posto por linhas = posto por colunas" (Corolário 5.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas, pelo dual)) outra vez: $\operatorname{Im}(T_A^\dagger)$ é o espaço das linhas de A.

Demonstração

$w \in N(T^\dagger) \iff \langle v, T^\dagger w\rangle = 0\ \forall v \iff \langle Tv, w\rangle = 0\ \forall v \iff w \in \operatorname{Im}(T)^\perp$. Pela simetria da definição, $(T^\dagger)^\dagger = T$; aplicando a primeira igualdade a $T^\dagger$, obtemos $\mathrm{N}(T) = \operatorname{Im}(T^\dagger)^\perp$, e tomando o complemento ortogonal dos dois lados (Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$)), $\mathrm{N}(T)^\perp = \operatorname{Im}(T^\dagger)$.

Usado em: Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas)

Veja também: Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear), Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Corolário 5.34 (Posto por linhas é igual a posto por colunas, pelo dual)

`prop-nucadj`

Definição 6.38 (Operador auto-adjunto)

Requer: Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais)

Um operador $T : V \to V$ é **auto-adjunto** se $T^\dagger = T$, isto é, $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ para todos u, v. Pela Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais), isso equivale a $[T]_B$ ser simétrica numa (e então em toda) base ortonormal B.

Usado em: Exemplo 6.39 (Projeções ortogonais são auto-adjuntas), Lema 9.2 (Auto-adjunto: autovetores de autovalores distintos são ortogonais), Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^\perp$ também é),

Proposição 9.7 (Um autovetor real pelo máximo de $\langle Tv, v\rangle$), Teorema 9.5 (Teorema espectral)

Veja também: Teorema 9.5 (Teorema espectral)

`def-autoadj`

Exemplo 6.39 (Projeções ortogonais são auto-adjuntas)

Requer: Definição 6.38 (Operador auto-adjunto), Definição 6.26 (Projeção ortogonal)

Projeções ortogonais são auto-adjuntas. Com $u = s + s'$ e $v = t + t'$ ($s, t \in S$, $s', t' \in S^\perp$): $\langle P_S u, v\rangle = \langle s, t\rangle = \langle u, P_S v\rangle$. (Uma projeção ao longo de um complementar não ortogonal não é.)

`ex-projecoes-ortogonais-sao-auto-adjuntas`

Exemplo 6.40 (A derivada nos polinômios trigonométricos é antiadjunta)

Requer: Proposição 6.36 (A matriz da adjunta em bases ortonormais), Exemplo 1.39 (A derivada é linear)

A derivada nos polinômios trigonométricos. Em $W = [1, \cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t]$ com $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg$, integrando por partes e usando a periodicidade,

$$\langle Df, g\rangle = \big[fg\big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} fg' = -\langle f, Dg\rangle.$$

Logo $D^\dagger = -D$: a derivada é *antiadjunta*. Na base ortonormal que se obtém normalizando a base dada, a matriz de D é antissimétrica (por exemplo, $D\cos t = -\operatorname{sen} t$ e $D\operatorname{sen} t = \cos t$).
As condições de contorno importam: em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ com $\int_{-1}^{1}$, o termo $[fg]_{-1}^{1}$ não se anula e $D^\dagger$ não é $-D$.

`ex-derivada-antiadjunta`

Exemplo 6.41 (Operadores ortogonais)

Requer: Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta), Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais)

Operadores ortogonais. $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ para todos u, v equivale a $T^\dagger T = I$; em base ortonormal, a $Q^t Q = I$. São os operadores que levam bases ortonormais em bases ortonormais.

`ex-operadores-ortogonais`

Nota 6.42 (Dicionário: subespaços, dual e produto interno)

Requer: Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno), Proposição 5.30 (O anulador troca soma e interseção), Proposição 5.55 ($(V/S)^* \cong S^0$), Teorema 6.35 (Existência e unicidade da adjunta)

em V	em V^* (sem escolha)	em V com produto interno
subespaço S	anulador S^0	complemento ortogonal $S^\perp$
$S_1 \subset S_2$	$S_2^0 \subset S_1^0$	$S_2^\perp \subset S_1^\perp$
$S_1 + S_2$	$S_1^0 \cap S_2^0$	$S_1^\perp \cap S_2^\perp$
quociente V/S	$(V/S)^* \cong S^0$	$V/S \cong S^\perp$
$T : V \to W$	transposta $T^* : W^* \to V^*$	adjunta $T^\dagger : W \to V$
base B	base dual B^*	B ortonormal $\iff G(B) = B^*$

A coluna do meio não depende de nada; a da direita depende do produto interno, e se obtém da do meio pelo isomorfismo de Riesz $G : V \to V^*$ (Teorema 6.34 (Teorema de Riesz: $V \cong V^*$ pelo produto interno)).

Veja também: Nota 5.32 (O dicionário entre subespaços e anuladores), Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas)

`nota-dicionario-dual-e-produto-interno`

Capítulo 7

Formas multilineares e sequências exatas

Formas multilineares, Alt^k, produto exterior e contração

Motivação 7.1 (Funções de vários vetores, lineares em cada um)

Requer: Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz), Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

Duas estruturas já vistas são funções de vários vetores, lineares em cada um:

- o determinante (Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)): n-linear e alternado nas colunas, e único com $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$;
- o produto interno (Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)): bilinear e simétrico.

Todas essas funções podem ser estudadas de uma vez, como elementos de espaços vetoriais.

Veja também: Definição 7.2 (Formas bilineares), Definição 7.8 (Formas k-lineares alternadas)

`mot-formas-multilineares`

Definição 7.2 (Formas bilineares)

Requer: Definição 1.36 (Transformação linear)

Uma **forma bilinear** em V é uma função $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ linear em cada variável. O conjunto delas, $\mathrm{Bil}(V)$, é um espaço vetorial com as operações ponto a ponto. β é **simétrica** se $\beta(u, v) = \beta(v, u)$, e **alternada** se $\beta(v, v) = 0$ para todo v.

Usado em: Definição 7.8 (Formas k-lineares alternadas), Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear), Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas)

Veja também: Motivação 7.1 (Funções de vários vetores, lineares em cada um)

`def-bil`

Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear)

Requer: Definição 7.2 (Formas bilineares), Definição 1.66 (Isomorfismo), Definição 3.12 (Matriz de mudança de base)

A demonstração exige: Proposição 3.13 (Mudança de coordenadas)

Seja $B = (v_1, \ldots, v_n)$ base de V e $M = [\beta]_B = (\beta(v_i, v_j))_{i,j}$. Então

$$\beta(u, v) = [u]_B^t \, M \, [v]_B,$$

e $\beta \mapsto [\beta]_B$ é um isomorfismo $\mathrm{Bil}(V) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$; em particular $\dim \mathrm{Bil}(V) = n^2$. Se $P = [I]_{BB'}$, então $[\beta]_{B'} = P^t [\beta]_B P$.
Atenção à fórmula de mudança de base: $P^t M P$, e não $P^{-1} M P$ como para operadores (Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$)). A mesma matriz quadrada pode representar um operador ou uma forma bilinear, e as duas leituras mudam de base de modos diferentes (Definição 9.15 (Matrizes congruentes)).

Demonstração

Com $u = \sum_i x_i v_i$ e $v = \sum_j y_j v_j$, a bilinearidade dá $\beta(u, v) = \sum_{i,j} x_i y_j \beta(v_i, v_j) = x^t M y$. A aplicação $\beta \mapsto M$ é linear, injetora (se $M = 0$, a fórmula dá $\beta = 0$) e sobrejetora (dada M, a fórmula define uma forma bilinear). Para a mudança de base: $[u]_B = P[u]_{B'}$, logo $\beta(u, v) = [u]_{B'}^t P^t M P [v]_{B'}$.

Usado em: Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais), Exercício 7.16 (Em dimensão ímpar, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v, \cdot) = 0$?) (dem.), Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas) (dem.)

Veja também: Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$), Definição 9.15 (Matrizes congruentes)

`prop-matbil`

Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas)

Requer: Definição 7.2 (Formas bilineares)

A demonstração exige: Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear), Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)

β é simétrica $\iff$ $[\beta]_B$ é simétrica; β é alternada $\iff$ $\beta(u, v) = -\beta(v, u)$ para todos u, v $\iff$ $[\beta]_B$ é antissimétrica. E $\mathrm{Bil}(V) = \mathrm{Sim}(V) \oplus \mathrm{Alt}(V)$, com

$$\beta = \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\beta(u, v) + \beta(v, u)\big)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\big(\beta(u, v) - \beta(v, u)\big)}_{\text{alternada}}.$$

Demonstração

Se β é alternada, expandindo $0 = \beta(u + v, u + v) = \beta(u, v) + \beta(v, u)$. Reciprocamente, $\beta(v, v) = -\beta(v, v)$ dá $\beta(v, v) = 0$. As afirmações sobre matrizes são a Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear) lida nas entradas. A decomposição é a de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$ (Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)), transportada pelo isomorfismo.

Usado em: Definição 9.12 (Forma quadrática), Exemplo 7.5 (O produto interno como forma bilinear), Exemplo 7.6 (A forma alternada $\det(x\ y)$ em $\mathbb{R}^2$), Exemplo 7.7 (O produto de dois funcionais e a sua parte alternada), Exercício 7.16 (Em dimensão ímpar, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v, \cdot) = 0$?), Exercício 7.17 (Em dimensão par, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v, \cdot) = 0$?), Proposição 7.9 (Propriedades das formas alternadas) (dem.)

`prop-simalt`

Exemplo 7.5 (O produto interno como forma bilinear)

Requer: Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas), Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

O produto escalar em $\mathbb{R}^n$ é uma forma bilinear, com matriz I na base canônica. Um produto interno qualquer é uma forma bilinear simétrica, com $\beta(v,v) > 0$ para $v \neq 0$.

ex-bil-a

Exemplo 7.6 (A forma alternada $\det(x\ y)$ em $\mathbb{R}^2$)

Requer: Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas), Exemplo 4.7 (O determinante 2×2)

$\omega(x,y) = x_1y_2 - x_2y_1 = \det(x\ y)$ em $\mathbb{R}^2$: alternada, com matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Usado em: Exercício 7.17 (Em dimensão par, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v,\cdot) = 0$?) (dem.)

ex-bil-b

Exemplo 7.7 (O produto de dois funcionais e a sua parte alternada)

Requer: Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas), Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual)

Dados $\xi, \zeta \in V^*$, $\beta(u,v) = \xi(u)\zeta(v)$ é bilinear; sua parte alternada é $\frac{1}{2}\big(\xi(u)\zeta(v) - \xi(v)\zeta(u)\big) = \frac{1}{2}(\xi \wedge \zeta)(u,v)$, com a notação da Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais).

Veja também: Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais)

ex-bil-c

Definição 7.8 (Formas k-lineares alternadas)

Requer: Definição 7.2 (Formas bilineares)

Uma função $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ é **k-linear** se é linear em cada variável, e **alternada** se $\omega(u_1,\dots,u_k) = 0$ sempre que $u_i = u_j$ para algum $i \neq j$. O espaço delas é $\mathrm{Alt}^k(V)$.

Usado em: Definição 7.21 (Contração por um vetor), Definição 7.18 (Pullback de uma forma por um operador), Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais), Proposição 7.9 (Propriedades das formas alternadas)

Veja também: Definição 4.2 (Formas n-lineares alternadas)

def-altk

Proposição 7.9 (Propriedades das formas alternadas)

Requer: Definição 7.8 (Formas k-lineares alternadas), Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

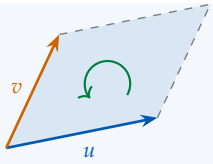
A demonstração exige: Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas), Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)

Seja $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$.

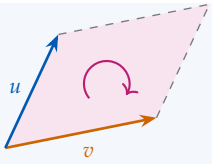
(a) *Trocar duas entradas de lugar muda o sinal de ω.*

(b) *Se $u_1,\dots,u_k$ são LD, então $\omega(u_1,\dots,u_k) = 0$.*

(c) *Se $k > \dim V$, então $\mathrm{Alt}^k(V) = \{0\}$.*



$\omega(u,v) > 0$



$\omega(v,u) = -\omega(u,v)$

LD: $\omega(u,v) = 0$

A forma $\omega = \det$ em $\mathbb{R}^2$ como área orientada. O valor é a área do paralelogramo, com sinal dado pelo sentido de giro de u para v. Trocar a ordem inverte o sentido (e o sinal); vetores LD geram um paralelogramo achatado, de área nula.

Demonstração

(a) É a conta da Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas), feita nas duas entradas trocadas com as outras fixas. (b) Se, digamos, $u_1 = \sum_{i\geq 2} a_i u_i$, a linearidade na primeira entrada dá uma soma de termos $a_i\,\omega(u_i, u_2, \ldots, u_k)$, cada um com uma entrada repetida. (c) Mais de n vetores são sempre LD (Corolário 2.81 (Em dimensão n: n vetores LI, ou n geradores, formam base)).

Usado em: Teorema 7.12 (Base e dimensão de $\mathrm{Alt}^k(V)$) (dem.)

Veja também: Proposição 4.3 (Propriedades das formas n-lineares alternadas)

`prop-alt`

Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais)

Requer: Definição 7.8 (Formas k-lineares alternadas), Definição 5.2 (Funcional linear e espaço dual), Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)

Dados $\xi_1, \ldots, \xi_k \in V^*$, o **produto exterior** deles é a forma

$$(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)(u_1, \ldots, u_k) = \det\big(\xi_i(u_j)\big)_{i,j}.$$

Para $k = 2$: $(\xi \wedge \zeta)(u,v) = \xi(u)\zeta(v) - \xi(v)\zeta(u)$.

Usado em: Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais), Proposição 7.11 (O produto exterior é alternado e detecta dependência linear), Teorema 7.12 (Base e dimensão de $\mathrm{Alt}^k(V)$)

`def-wedge`

Proposição 7.11 (O produto exterior é alternado e detecta dependência linear)

Requer: Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais)

A demonstração exige: Corolário 4.14 (O que vale para colunas vale para linhas), Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem escolha), Teorema 2.79 (Teorema do completamento)

$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k \in \mathrm{Alt}^k(V)$. Ela é k-linear e alternada também como função dos ξ_i, e é nula se e somente se $\xi_1, \ldots, \xi_k$ são LD.

Demonstração

Mudar u_j muda só a coluna j da matriz $(\xi_i(u_j))$, e linearmente; logo a forma é k-linear pelo determinante ser linear em cada coluna. Se $u_j = u_l$, duas colunas são iguais e o determinante é nulo. O mesmo argumento, com as linhas, vale para os ξ_i. Se os ξ_i são LD, as linhas da matriz são LD para todos os u, e o determinante é nulo. Se são LI, complete-os a uma base de V^*; ela é a base dual de uma base $(u_1, \ldots, u_n)$ de V (pelo Teorema 5.23 (V e V^{**} são isomorfos sem

escolha), a base de V é a imagem por ev^{-1} da base dual da base de V^*). Então $\xi_i(u_j) = \delta_{ij}$ e $(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)(u_1, \ldots, u_k) = \det I = 1$.

`prop-wedge`

Teorema 7.12 (Base e dimensão de $\mathrm{Alt}^k(V)$)

Requer: Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais), Definição 5.8 (Base dual)

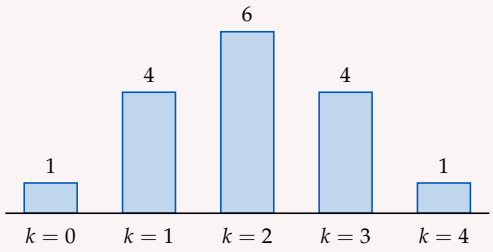
A demonstração exige: Proposição 7.9 (Propriedades das formas alternadas)

Para $I = (i_1 < \cdots < i_k)$ e uma base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V, escrevemos $v_I^* = v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*$ e $v_I = (v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})$.

Seja $B = (v_1, \ldots, v_n)$ base de V. Toda $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$ se escreve de modo único como

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k})\, v_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge v_{i_k}^*.$$

Logo $\{v_I^*\}_{I \text{ crescente}}$ é base de $\mathrm{Alt}^k(V)$ e $\dim \mathrm{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}$.



$\dim \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^4) = \binom{4}{k}$
$k = 2$: $e_1^* \wedge e_2^*, e_1^* \wedge e_3^*, e_1^* \wedge e_4^*,$
$e_2^* \wedge e_3^*, e_2^* \wedge e_4^*, e_3^* \wedge e_4^*$
$k = 4$: só $e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* = \det$

As dimensões dos $\mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^4)$: uma linha do triângulo de Pascal. Cada elemento da base corresponde a uma escolha de k índices crescentes. Em grau máximo há uma só escolha, e o espaço é uma reta gerada pelo determinante.

Demonstração

Um cálculo: para I, J crescentes, $v_I^*(v_J) = \det\left(v_{i_a}^*(v_{j_b})\right)$. Se $I = J$, a matriz é a identidade. Se $I \neq J$, algum i_a não está em J, e a linha a é nula. Logo $v_I^*(v_J) = \delta_{IJ}$.

Gera: seja $\eta = \sum_I \omega(v_I) v_I^*$. Pelo cálculo, $\eta(v_J) = \omega(v_J)$ para toda J crescente. Uma k-upla qualquer de vetores da base ou tem repetição (e as duas formas dão zero), ou se reordena numa crescente trocando entradas (e as duas formas mudam de sinal do mesmo modo). Logo η e ω coincidem em todas as k-uplas de vetores da base, e por k-linearidade coincidem em tudo.

LI: se $\sum_I c_I v_I^* = 0$, avaliando em v_J vem $c_J = 0$.

Usado em: Corolário 7.13 (dim $\mathrm{Alt}^n(V) = 1$: toda forma de grau máximo é múltiplo do determinante), Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial)

`thm-base`

Corolário 7.13 ($\dim \mathrm{Alt}^n(V) = 1$: toda forma de grau máximo é múltiplo do determinante)

Requer: Teorema 7.12 (Base e dimensão de $\mathrm{Alt}^k(V)$)

$\dim \mathrm{Alt}^n(V) = 1$. Em $\mathbb{R}^n$, a forma $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ é det, e toda forma n-linear alternada é um múltiplo dela.

Este corolário é o Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada), demonstrado de outra forma: lá, uma forma n-linear alternada com $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$ era única; aqui, o espaço dessas formas tem dimensão 1. A demonstração do Teorema 7.12 (Base e dimen-

são de $\mathrm{Alt}^k(V)$) *é* a do Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada) ("reordene e use a linearidade"), feita para k qualquer.

Demonstração

$(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(u_1, \ldots, u_n) = \det\left(e_i^*(u_j)\right) = \det(u_1 \ \cdots \ u_n)$, porque $e_i^*(u_j)$ é a i-ésima coordenada de u_j.

Usado em: Teorema 7.20 (T age em $\mathrm{Alt}^n(V)$ multiplicando por $\det T$)

Veja também: Teorema 4.5 (Unicidade da forma n-linear alternada), Nota 4.17 (A unicidade do determinante é uma ferramenta)

`cor-det`

Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial)

Requer: Teorema 7.12 (Base e dimensão de $\mathrm{Alt}^k(V)$), Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace), Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$)

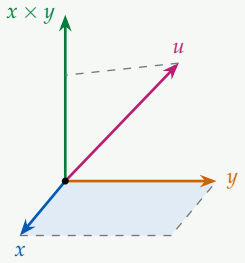
$\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ *e o produto vetorial.* $\dim \mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Um isomorfismo explícito: a cada $u \in \mathbb{R}^3$ associe

$$\omega_u(x, y) = \det(u \ x \ y).$$

Na base, $\omega_{e_1} = e_2^* \wedge e_3^*$, $\omega_{e_2} = e_3^* \wedge e_1^*$, $\omega_{e_3} = e_1^* \wedge e_2^*$ (confira nos pares (e_i, e_j)). E pela expansão de Laplace na primeira coluna,

$$\omega_u(x, y) = \langle u, \ x \times y \rangle,$$

onde $x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, \ x_3y_1 - x_1y_3, \ x_1y_2 - x_2y_1)$ é o produto vetorial. Assim o produto vetorial é uma forma alternada de grau 2 disfarçada de vetor, pelo isomorfismo $u \mapsto \omega_u$ e pelo produto interno. Esse disfarce só é possível porque $\binom{3}{2} = 3$; em $\mathbb{R}^4$, $\binom{4}{2} = 6 \neq 4$.



$\omega_u(x, y) = \det(u \ x \ y)$
$= \langle u, \ x \times y \rangle$

volume = altura de u vezes área da base

O volume orientado do paralelepípedo de u, x, y é a área da base (o paralelogramo de x, y) vezes a altura de u na direção perpendicular. O produto vetorial $x \times y$ é o vetor perpendicular à base com comprimento igual à área; a altura vezes a área é o produto interno com ele.

Usado em: Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato)

`ex-vetorial`

Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais)

Requer: Definição 7.10 (Produto exterior de funcionais), Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear), Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços), Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo)

Em $\mathbb{R}^4$, seja $\omega = e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$. *Ela não é da forma* $\xi \wedge \zeta$. Suponha que fosse. O

subespaço $N(\xi) \cap N(\zeta)$ tem dimensão ≥ 2 (Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços) e Proposição 5.7 (Dimensão do dual; o núcleo de um funcional não nulo)), e para v nele,

$$\omega(v, y) = \xi(v)\zeta(y) - \xi(y)\zeta(v) = 0 \qquad \text{para todo } y.$$

Mas a matriz de ω na base canônica é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

que é invertível; e $\omega(v, y) = 0$ para todo y diz $v^t M = 0$, isto é, $v = 0$. Contradição.

Usado em: Exercício 7.17 (Em dimensão par, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v, \cdot) = 0$?) (dem.)

`ex-naofat`

Exercício 7.16 (Em dimensão ímpar, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v, \cdot) = 0$?)

Requer: Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas)

A demonstração exige: Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear), Teorema 4.13 (det A^t = det A), Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível)

Verdadeiro ou falso? *Se* dim V *é ímpar e* ω *é uma forma bilinear alternada em* V*, então existe* $v \neq 0$ *com* $\omega(v, \cdot) = 0$.

Resolução

Verdadeira. Seja M a matriz de ω numa base (Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear)); M é antissimétrica, $n \times n$ com n ímpar. Então

$$\det M = \det M^t = \det(-M) = (-1)^n \det M = -\det M,$$

logo $\det M = 0$, e existe $x \neq 0$ com $M^t x = 0$. O vetor v com $[v] = x$ satisfaz $\omega(v, u) = x^t M[u] = (M^t x)^t [u] = 0$ para todo u.

`exerc-forma-alternada-em-dimensao-impar`

Exercício 7.17 (Em dimensão par, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v, \cdot) = 0$?)

Requer: Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas)

A demonstração exige: Exemplo 7.6 (A forma alternada $\det(x\ y)$ em $\mathbb{R}^2$), Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais)

Verdadeiro ou falso? *Se* dim V *é par e* ω *é uma forma bilinear alternada em* V*, então existe* $v \neq 0$ *com* $\omega(v, \cdot) = 0$.

Resolução

Falsa. Em $\mathbb{R}^2$, $\omega(x, y) = \det(x\ y)$ tem matriz $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, invertível: $\omega(v, \cdot) = 0$ só para $v = 0$. (Em $\mathbb{R}^4$, a forma $e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$ do Exemplo 7.15 (Uma forma de grau 2 que não é produto de dois funcionais).)

Veja também: Exercício 7.16 (Em dimensão ímpar, toda forma alternada tem $v \neq 0$ com $\omega(v, \cdot) = 0$?)

`exerc-forma-alternada-em-dimensao-par`

Definição 7.18 (Pullback de uma forma por um operador)

Requer: Definição 7.8 (Formas k-lineares alternadas)

Seja $T : V \to V$ linear. Para $\omega \in \mathrm{Alt}^k(V)$, o **pullback** de ω por T é

$$(T^\sharp\omega)(u_1,\dots,u_k) = \omega\big(T(u_1),\dots,T(u_k)\big).$$

Usado em: Proposição 7.19 (O pullback é linear e inverte a composição), Teorema 7.20 (T age em $\mathrm{Alt}^n(V)$ multiplicando por $\det T$)

`def-pull`

Proposição 7.19 (O pullback é linear e inverte a composição)

Requer: Definição 7.18 (Pullback de uma forma por um operador)

$T^\sharp$ é um operador linear em $\mathrm{Alt}^k(V)$, e $(S\circ T)^\sharp = T^\sharp \circ S^\sharp$.

Demonstração

$T^\sharp\omega$ é k-linear (composição com T em cada entrada) e alternada (entradas iguais continuam iguais depois de T). Linearidade em ω: as operações são ponto a ponto. Composição: $((S\circ T)^\sharp\omega)(u) = \omega(STu_1,\dots) = (S^\sharp\omega)(Tu_1,\dots) = (T^\sharp S^\sharp\omega)(u)$.

Usado em: Teorema 7.20 (T age em $\mathrm{Alt}^n(V)$ multiplicando por $\det T$) (dem.)

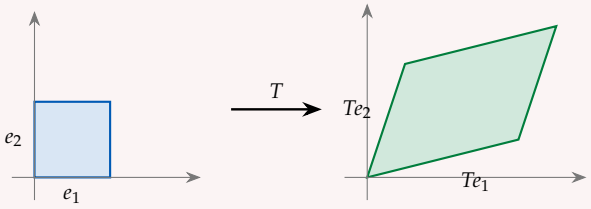
`prop-pull`

Teorema 7.20 (T age em $\mathrm{Alt}^n(V)$ multiplicando por $\det T$)

Requer: Definição 7.18 (Pullback de uma forma por um operador), Corolário 7.13 ($\dim \mathrm{Alt}^n(V) = 1$: toda forma de grau máximo é múltiplo do determinante), Definição 4.23 (Determinante de um operador)

A demonstração exige: Proposição 7.19 (O pullback é linear e inverte a composição)

Seja $\dim V = n$. *Existe um número* $c(T)$ *tal que* $T^\sharp\omega = c(T)\,\omega$ *para toda* $\omega \in \mathrm{Alt}^n(V)$, *e* $c(T) = \det T$. *Em consequência,* $\det(S\circ T) = \det S \cdot \det T$.



área 1 área orientada $\det T$

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

$$\det T = 3 - 0.25 = 2.75$$

O determinante como fator de volume. $T^\sharp\omega = (\det T)\,\omega$ *diz que* T *multiplica todo volume orientado pelo mesmo número. Daí* $\det(ST) = \det S \det T$*: aplicar* T *e depois* S *multiplica os volumes pelos dois fatores.*

No Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$), $\det(AB) = \det A \det B$ foi demonstrado com matrizes; aqui ele é consequência de "operador linear numa reta é multiplicação por um número" e de $(ST)^\sharp = T^\sharp S^\sharp$. E o determinante de um operador é definido sem base nenhuma: $\det T$ é o número pelo qual T age em $\mathrm{Alt}^n(V)$. A independência de base, que antes exigiu $\det(P^{-1}AP) = \det A$ (Corolário 4.22 (Determinante da inversa e de uma conjugada)), vem de graça.

Demonstração

$\mathrm{Alt}^n(V)$ tem dimensão 1, e todo operador linear num espaço de dimensão 1 é a multiplicação por um número: se $\omega_0 \neq 0$, $T^\sharp\omega_0 = c\,\omega_0$ para algum c, e então $T^\sharp(\lambda\omega_0) = c\,\lambda\omega_0$. Para calcular c, tome uma base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ e $\omega_B = v_1^* \wedge \cdots \wedge v_n^*$, que vale $\omega_B(u_1, \ldots, u_n) = \det([u_1]_B \ \cdots \ [u_n]_B)$ (como no Corolário 7.13 (dim $\mathrm{Alt}^n(V) = 1$: toda forma de grau máximo é múltiplo do determinante)). Então

$$c(T) = c(T)\,\omega_B(v_1, \ldots, v_n) = \omega_B(Tv_1, \ldots, Tv_n) = \det\left([Tv_1]_B \ \cdots \ [Tv_n]_B\right) = \det[T]_B.$$

Finalmente, pela Proposição 7.19 (O pullback é linear e inverte a composição), $c(S \circ T)\,\omega = T^\sharp S^\sharp \omega = c(S)c(T)\,\omega$.

Veja também: Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$), Corolário 4.22 (Determinante da inversa e de uma conjugada), Nota 4.15 (O determinante é volume com sinal)

`thm-detop`

Definição 7.21 (Contração por um vetor)

Requer: Definição 7.8 (Formas k-lineares alternadas)

Dado $v \in V$, a **contração** por v é $\iota_v : \mathrm{Alt}^k(V) \to \mathrm{Alt}^{k-1}(V)$,

$$(\iota_v\omega)(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \omega(v, u_1, \ldots, u_{k-1}),$$

com $\iota_v = 0$ em $\mathrm{Alt}^0(V) = \mathbb{R}$.

Usado em: Proposição 7.22 ($\iota_v \circ \iota_v = 0$: a contração forma um complexo)

`def-contr`

Proposição 7.22 ($\iota_v \circ \iota_v = 0$: a contração forma um complexo)

Requer: Definição 7.21 (Contração por um vetor)

ι_v é linear, e $\iota_v \circ \iota_v = 0$.
Assim a sequência

$$0 \to \mathrm{Alt}^n(V) \xrightarrow{\iota_v} \mathrm{Alt}^{n-1}(V) \xrightarrow{\iota_v} \cdots \xrightarrow{\iota_v} \mathrm{Alt}^1(V) \xrightarrow{\iota_v} \mathrm{Alt}^0(V) \to 0$$

tem a propriedade de que a composta de duas setas consecutivas é nula: é um *complexo*. Em $\mathbb{R}^3$, identificando os Alt^k com $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}$ como no Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial), as setas são $a \mapsto av$, $w \mapsto w \times v$ e $w \mapsto \langle v, w\rangle$; e $\iota_v \circ \iota_v = 0$ diz, por exemplo, $(av) \times v = 0$ e $\langle v, w \times v\rangle = 0$.
Nesse complexo (Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas)), a imagem de cada seta está contida no núcleo da seguinte. Se $v \neq 0$, são iguais: é a Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato).

Demonstração

A linearidade é a de ω nas entradas 2 a k. E, por ω ser alternada,

$$(\iota_v\iota_v\omega)(u_1, \ldots, u_{k-2}) = \omega(v, v, u_1, \ldots, u_{k-2}) = 0.$$

Usado em: Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato)

Veja também: Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial), Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas), Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato)

`prop-contr`

Complexos e sequências exatas

Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

Uma sequência de transformações lineares

$$\cdots \to V_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} V_i \xrightarrow{f_i} V_{i+1} \to \cdots$$

é um **complexo** se $f_i \circ f_{i-1} = 0$ para todo i (isto é, $\mathrm{Im}(f_{i-1}) \subset N(f_i)$), e é **exata em** V_i se $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = N(f_i)$. Uma **sequência exata curta** é uma sequência exata

$$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0.$$

Usado em: Definição 7.31 (Cohomologia de um complexo), Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato), Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas)

Veja também: Proposição 7.22 ($\iota_v \circ \iota_v = 0$: a contração forma um complexo)

`def-exata`

Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas)

Requer: Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas), Definição 2.75 (Dimensão)

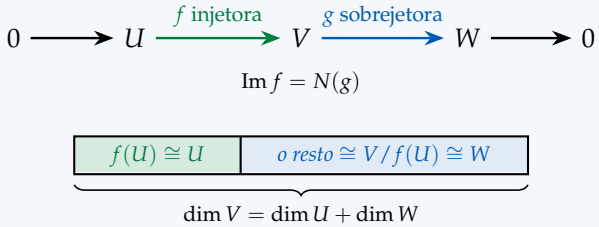
A demonstração exige: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Proposição 1.60 ($T$ é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

$0 \to U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W \to 0$ *é exata se e somente se* f *é injetora,* g *é sobrejetora e* $\mathrm{Im}(f) = N(g)$. *Nesse caso,*

$$\dim V = \dim U + \dim W \qquad \text{e} \qquad W \cong V/f(U).$$

Demonstração

Exatidão em U: o núcleo de f é a imagem de $0 \to U$, que é $\{0\}$. Em W: a imagem de g é o núcleo de $W \to 0$, que é W. Em V: $\mathrm{Im}(f) = N(g)$. Então $\dim V = \dim N(g) + \dim \mathrm{Im}(g) = \dim f(U) + \dim W = \dim U + \dim W$; e o teorema do isomorfismo (Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$)) dá $V/N(g) \cong W$.



Uma sequência exata curta é a régua do Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem) com nomes novos: U *entra em* V *como o núcleo de* g*, e* W *é o que sobra. A escolha de um complementar de* $f(U)$ *(ou de um produto interno) dá* $V \cong U \times W$*; sem escolha, só se tem* $W \cong V/f(U)$.

Uma $\sigma : W \to V$ com $g \circ \sigma = \mathrm{Id}$ sempre existe (tome uma base de W e escolha pré-imagens), e dá $V \cong U \times W$. Isso é *especial* de espaços vetoriais: para grupos, $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$ é exata e não cinde.

Usado em: Exemplo 7.25 (A sequência exata de um quociente), Exemplo 7.26 (A sequência exata do núcleo e da imagem), Exemplo 7.27 (A sequência exata de um produto cartesiano), Exemplo 7.28 (A sequência exata das matrizes simétricas e antissimétricas), Exercício 7.30 (Numa sequência exata curta, $V \cong U \times W$?), Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas)

Veja também: Nota 2.80 (LI de um lado, geradores do outro, base no meio)

`prop-curta`

Exemplo 7.25 (A sequência exata de um quociente)

Requer: Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas), Proposição 5.41 (V/S é um espaço vetorial; a projeção π)

É uma sequência exata curta: $0 \to S \hookrightarrow V \xrightarrow{\pi} V/S \to 0$, para todo subespaço S.

`ex-curtas-a`

Exemplo 7.26 (A sequência exata do núcleo e da imagem)

Requer: Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas)

É uma sequência exata curta: $0 \to \mathrm{N}(T) \hookrightarrow V \xrightarrow{T} \mathrm{Im}(T) \to 0$, para toda $T : V \to W$.

`ex-curtas-b`

Exemplo 7.27 (A sequência exata de um produto cartesiano)

Requer: Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas), Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais)

É uma sequência exata curta: $0 \to U \xrightarrow{u \mapsto (u,0)} U \times W \xrightarrow{(u,w) \mapsto w} W \to 0$, com o produto cartesiano (Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais)).

`ex-curtas-c`

Exemplo 7.28 (A sequência exata das matrizes simétricas e antissimétricas)

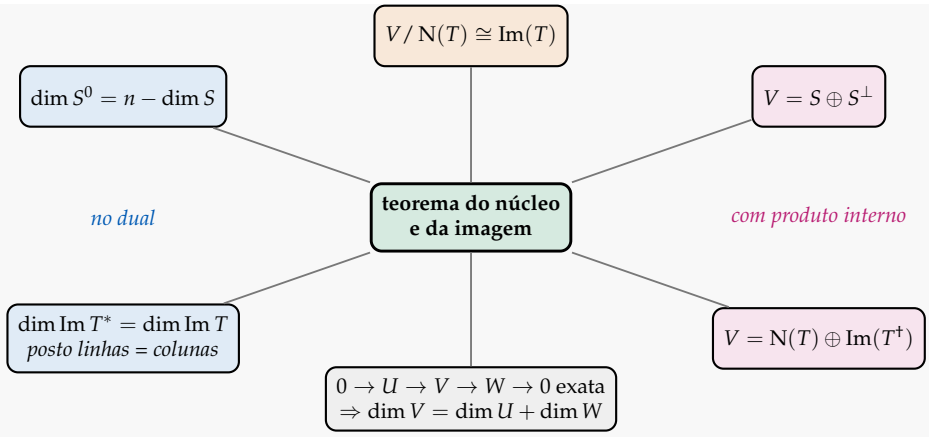
Requer: Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas), Exemplo 2.35 (A projeção sobre as matrizes simétricas)

É uma sequência exata curta: $0 \to \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \xrightarrow{A \mapsto \frac{1}{2}(A + A^t)} \mathrm{Sim} \to 0$ (Exemplo 2.35 (A projeção sobre as matrizes simétricas)).

`ex-curtas-d`

Nota 7.29 (O teorema do núcleo e da imagem em seis roupas)

Requer: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Proposição 5.25 (Dimensão do anulador), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear), Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$), Proposição 6.37 (Núcleo e imagem da adjunta), Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas)



Seis enunciados que são o mesmo teorema (Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem)). À esquerda, o teorema lido no dual (Proposição 5.25 (Dimensão do anulador), Teorema 5.33 (Os quatro subespaços de uma transformação linear)); à direita, com produto interno (Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$), Proposição 6.37 (Núcleo e imagem da adjunta)); em cima, sem escolha nenhuma, pelo quociente (Teorema 5.48 (Teorema do isomorfismo: $V/\mathrm{N}(T) \cong \mathrm{Im}(T)$)); embaixo, na linguagem das sequências exatas (Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas)).

Veja também: Nota 3.40 (O teorema do núcleo e da imagem em quatro roupas), Nota 6.42 (Dicionário: subespaços, dual e produto interno)

`nota-seis-roupas`

Exercício 7.30 (Numa sequência exata curta, $V \cong U \times W$?)

Requer: Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas), Definição 2.90 (Produto cartesiano de espaços vetoriais)

A demonstração exige: Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa), Corolário 2.95 (Isomorfos se e somente se têm a mesma dimensão)

Verdadeiro ou falso? *Se* $0 \to U \to V \to W \to 0$ *é exata, então* $V \cong U \times W$.

Resolução

Verdadeira. Pela Proposição 7.24 (Sequências exatas curtas), $\dim V = \dim U + \dim W = \dim(U \times W)$ (Proposição 2.91 (Dimensão do produto; soma direta interna e externa)); espaços de mesma dimensão finita são isomorfos.

`exerc-exata-curta-e-produto`

Definição 7.31 (Cohomologia de um complexo)

Requer: Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas), Definição 5.39 (Classes módulo um subespaço; o conjunto V/S)

Num complexo, a **cohomologia** em V_i é $H^i = N(f_i)/\mathrm{Im}(f_{i-1})$. O complexo é exato em V_i se e somente se $H^i = \{0\}$.

Usado em: Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo)

`def-coh`

Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo)

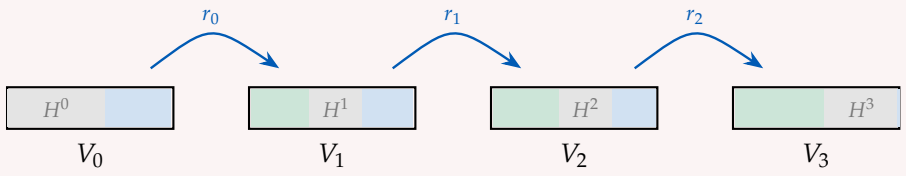
Requer: Definição 7.31 (Cohomologia de um complexo), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

Seja $0 \to V_0 \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \to 0$ *um complexo de espaços de dimensão finita. Então*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i.$$

Em particular, se o complexo é exato, $\sum_i (-1)^i \dim V_i = 0$.



verde: imagem da seta que chega cinza: H^i azul: o que a seta seguinte leva injetivamente adiante

Cada V_i *se parte em três pedaços de dimensões* r_{i-1}, $\dim H^i$ *e* r_i. *O pedaço azul de* V_i *tem a mesma dimensão que o verde de* V_{i+1}*; na soma alternada eles entram com sinais opostos e se cancelam, e só sobram os cinzas. Num complexo exato não há cinza.*

Demonstração

Ponha $r_i = \dim \operatorname{Im}(f_i)$, com $r_{-1} = r_n = 0$. Pelo Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), $\dim V_i = \dim N(f_i) + r_i$; e pela Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$), $\dim N(f_i) = r_{i-1} + \dim H^i$. Logo

$$\dim V_i = r_{i-1} + \dim H^i + r_i.$$

Na soma alternada, cada r_i aparece duas vezes, com sinais $(-1)^i$ e $(-1)^{i+1}$, e se cancela.
O nome vem da fórmula de Euler para poliedros, $V - A + F = 2$.

Usado em: Exercício 7.33 (Soma alternada das dimensões nula implica exatidão?)

`thm-caracteristica-de-euler`

Exercício 7.33 (Soma alternada das dimensões nula implica exatidão?)

Requer: Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo)

Verdadeiro ou falso? *Se* $0 \to V_0 \to \cdots \to V_n \to 0$ *é um complexo com* $\sum_i (-1)^i \dim V_i = 0$, *então ele é exato.*

Resolução

Falsa. O complexo $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{0} \mathbb{R} \to 0$ tem $1 - 1 = 0$ e não é exato: a seta do meio não é injetora ($H^0 = \mathbb{R}$) nem sobrejetora ($H^1 = \mathbb{R}$). O Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo) só diz que a soma alternada dos $\dim H^i$ é zero, e $1 - 1 = 0$.

`exerc-soma-alternada-nula-e-exatidao`

Proposição 7.34 (O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$ é exato)

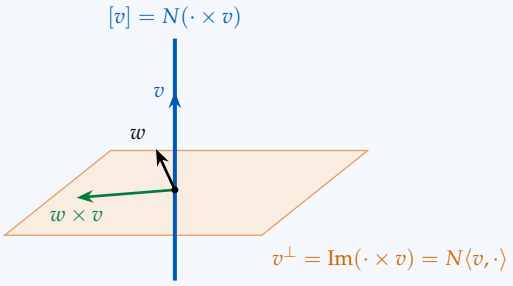
Requer: Proposição 7.22 ($\iota_v \circ \iota_v = 0$: a contração forma um complexo), Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial), Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas)

A demonstração exige: Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$)

A contração por v forma um complexo (Proposição 7.22 ($\iota_v \circ \iota_v = 0$: a contração forma um complexo)). Em $\mathbb{R}^3$, com as identificações do Exemplo 7.14 ($\mathrm{Alt}^2(\mathbb{R}^3)$ e o produto vetorial), ele é

$$0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{a \mapsto av} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{w \mapsto w \times v} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{w \mapsto \langle v, w \rangle} \mathbb{R} \to 0.$$

Se $v \neq 0$, esse complexo é exato. Isto é: $w \times v = 0 \iff w \in [v]$; e $\langle v, w \rangle = 0 \iff w = u \times v$ para algum u.
A característica de Euler (Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo)) confere: $1 - 3 + 3 - 1 = 0$. É o caso $n = 3$ de $\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.



O complexo da contração em $\mathbb{R}^3$. O núcleo de $w \mapsto w \times v$ é a reta $[v]$, imagem da primeira seta; a imagem dela é o plano $v^\perp$, núcleo da última. A exatidão são dois fatos conhecidos de geometria.

Demonstração

Complexo: $(av) \times v = 0$ e $\langle v, w \times v \rangle = \det(v\ w\ v) = 0$. *Exatidão nas pontas:* $a \mapsto av$ é injetora e $w \mapsto \langle v, w \rangle$ é sobrejetora, porque $v \neq 0$. *No meio:* se $w \notin [v]$, então $w \times v \neq 0$, porque $\|w \times v\|$ é a área do paralelogramo de w e v, não nula quando eles são LI. Logo $N(\cdot \times v) = [v]$, que é a imagem da primeira seta. Pelo Teorema 2.92 (Teorema do núcleo e da imagem), a imagem de $w \mapsto w \times v$ tem dimensão 2; ela está contida em $v^\perp$ (por ser um complexo), que tem dimensão 2 e é o núcleo da última seta. Logo são iguais.

Veja também: Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo)

`prop-contrexata`

Capítulo 8

Autovalores e diagonalização

Autovalores, autovetores e autoespaços

Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Requer: Definição 1.58 (Núcleo e imagem)

Seja $T : V \to V$ linear. Um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de T se existe $v \neq 0$ com $Tv = \lambda v$; tal v é um **autovetor** associado a λ. O **autoespaço** de λ é

$$V_\lambda = N(T - \lambda I) = \{v \in V : \ Tv = \lambda v\}.$$

Dois pontos da definição. *(i)* O autovetor tem de ser não nulo — senão todo λ seria autovalor, porque $T0 = \lambda 0$. *(ii)* O autoespaço contém o zero, que não é autovetor: V_λ é "os autovetores e mais o zero".

Usado em: Corolário 8.24 (n autovalores distintos bastam para diagonalizar), Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica), Exemplo 8.7 (Cisalhamento: um só autoespaço), Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização), Exemplo 8.39 (Núcleo, imagem e autoespaços são invariantes), Exemplo 8.40 (Uma reta é invariante quando é gerada por um autovetor), Exemplo 8.5 (Projeção: autovalores 1 e 0), Exemplo 8.4 (Reflexão: autovalores 1 e -1), Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real), Lema 9.2 (Auto-adjunto: autovetores de autovalores distintos são ortogonais), Motivação 8.3 (Onde a flecha não gira), Proposição 8.2 (O autoespaço é um subespaço; $V_0 = \mathrm{N}(T)$), Proposição 8.46 (Operadores que comutam), Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$), Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores), Teorema 8.23 (Critério de diagonalização), Teorema 9.5 (Teorema espectral), Teorema 8.15 (Autovetores de autovalores distintos são LI), Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados)

Veja também: Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal)

`def-auto`

Proposição 8.2 (O autoespaço é um subespaço; $V_0 = \mathrm{N}(T)$)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Exemplo 2.6 (Núcleo e imagem são subespaços)

A demonstração exige: Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$)

V_λ é subespaço, e λ é autovalor se e somente se $V_\lambda \neq \{0\}$. O número 0 é autovalor se e somente se T não é injetor, e $V_0 = \mathrm{N}(T)$.

Demonstração

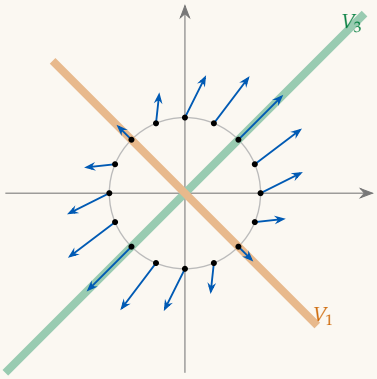
V_λ é o núcleo de um operador linear. O resto é a definição.

`prop-autoesp`

Motivação 8.3 (Onde a flecha não gira)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Seja $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ (Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2)).



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

em cada v do círculo, a flecha aponta na direção de Av; só nas retas coloridas ela aponta na direção de v

Em cada ponto v do círculo, a flecha azul é um múltiplo de Av desenhado a partir de v. Em geral ela não aponta para fora do círculo na direção de v: Av girou. Na diagonal (verde), $Av = 3v$, e a flecha é radial e longa; na antidiagonal (laranja), $Av = v$, e a flecha é radial e curta. Essas são as duas direções próprias, e numa base formada por elas a matriz fica $\mathrm{diag}(3, 1)$.

Desenhando as flechas, acham-se as duas retas antes de qualquer conta; o polinômio característico (Definição 8.10 (Polinômio característico)) confirma.

Veja também: Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2), Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal), Definição 8.10 (Polinômio característico)

`mot-direcoes-proprias`

Exemplo 8.4 (Reflexão: autovalores 1 e -1)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Reflexão numa reta ℓ pela origem: ℓ é o autoespaço de 1, e a perpendicular $\ell^\perp$ é o de -1.

Usado em: Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

Veja também: Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

`ex-reflexao`

Exemplo 8.5 (Projeção: autovalores 1 e 0)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)

Projeção sobre ℓ ao longo de outra reta m (Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)): autovalores 1 (em ℓ) e 0 (em m).

Usado em: Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

Veja também: Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

`ex-projecao`

Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Exemplo 1.44 (Rotação e projeção em $\mathbb{R}^2$)

Rotação de ângulo $\theta \in (0, \pi)$: nenhuma reta é levada nela mesma; nenhum autovalor real.

Usado em: Exemplo 8.48 (Comutar não basta para ter um autovetor real comum), Motivação 8.37 (Quando não dá para diagonalizar), Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

Veja também: Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

`ex-rotacao`

Exemplo 8.7 (Cisalhamento: um só autoespaço)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Cisalhamento $T(x, y) = (x + y, y)$: o eixo x é fixo ($\lambda = 1$), e nenhuma outra direção é preservada. Um só autoespaço, de dimensão 1.

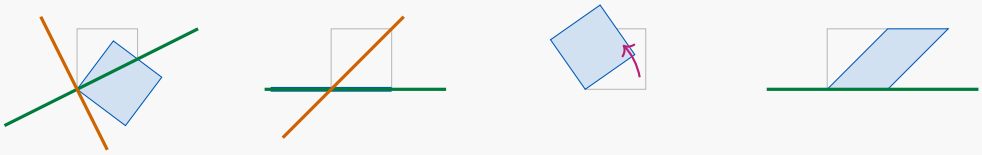
Usado em: Motivação 8.37 (Quando não dá para diagonalizar), Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

Veja também: Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

`ex-cisalhamento`

Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

Requer: Exemplo 8.4 (Reflexão: autovalores 1 e -1), Exemplo 8.5 (Projeção: autovalores 1 e 0), Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real), Exemplo 8.7 (Cisalhamento: um só autoespaço)



reflexão: ± 1 | projeção: 1 e 0 | rotação: nenhum | cisalhamento: só 1

O quadrado unitário (cinza) e sua imagem (azul) por quatro operadores de $\mathbb{R}^2$, com os autoespaços em cor. A reflexão e a projeção têm duas retas invariantes e são diagonalizáveis; a rotação não tem nenhuma; o cisalhamento tem uma só.

Veja também: Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

`nota-quatro-operadores-do-plano`

Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Definição 4.23 (Determinante de um operador)

A demonstração exige: Proposição 1.60 (T é injetora se e somente se $\mathrm{N}(T) = \{0\}$), Corolário 2.93 (Em dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora), Proposição 4.24 (T é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$)

Seja $\dim V = n$. Então λ é autovalor de T se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$.

Demonstração

λ é autovalor $\iff$ $T - \lambda I$ não é injetor $\iff$ $T - \lambda I$ não é invertível (Corolário 2.93 (Em

dimensões iguais, injetora equivale a sobrejetora)) $\iff$ $\det(T-\lambda I)=0$ (Proposição 4.24 (T é isomorfismo se e somente se $\det T \neq 0$)).

Usado em: Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2), Exemplo 8.13 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 3×3), Exemplo 8.20 (Dois operadores que derivam: D e $x\,D$), Teorema 9.5 (Teorema espectral) (dem.), Teorema 8.54 (Triangularização) (dem.)

`prop-det`

Definição 8.10 (Polinômio característico)

Requer: Definição 4.23 (Determinante de um operador)

O **polinômio característico** de T é $p_T(\lambda)=\det(T-\lambda I)$. Para uma matriz A, $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$.

Usado em: Corolário 8.51 (Todo operador real tem um invariante de dimensão 1 ou 2), Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica), Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2), Exemplo 8.13 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 3×3), Exemplo 8.49 (Rotação com dilatação: a matriz de $a+ib$), Exemplo 8.56 (Cayley–Hamilton para matrizes 2×2), Exemplo 8.20 (Dois operadores que derivam: D e $x\,D$), Exemplo 8.21 (A rotação não tem autovalor real), Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica), Nota 8.53 (Escalares complexos), Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T), Proposição 8.11 (O polinômio característico: grau, traço e determinante), Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton), Teorema 8.62 (Polinômio mínimo), Teorema 8.54 (Triangularização)

Veja também: Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T-\lambda I)=0$)

`def-pcar`

Proposição 8.11 (O polinômio característico: grau, traço e determinante)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico)

p_T não depende da base usada para calculá-lo, e é um polinômio de grau n:

$$p_T(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(\operatorname{tr}T)\,\lambda^{n-1}+\cdots+\det T.$$

Para $n=2$: $p_A(\lambda)=\lambda^2-(\operatorname{tr}A)\lambda+\det A$.

Demonstração

Se $A'=P^{-1}AP$, então $A'-\lambda I=P^{-1}(A-\lambda I)P$, e o determinante é o mesmo (Corolário 4.22 (Determinante da inversa e de uma conjugada)). Pela fórmula de Leibniz (Teorema 4.6 (Existência do determinante: a fórmula de Leibniz)), $\det(A-\lambda I)$ é uma soma de produtos de n entradas, uma de cada linha e coluna; cada entrada é constante ou da forma $a_{ii}-\lambda$. O único produto com grau $\geq n-1$ em λ é o da diagonal, $\prod_i(a_{ii}-\lambda)$, porque um produto que use uma entrada fora da diagonal deixa de usar pelo menos duas entradas diagonais. Expandindo, os coeficientes de λ^n e λ^{n-1} são $(-1)^n$ e $(-1)^{n-1}\sum_i a_{ii}$. O termo constante é $p_T(0)=\det T$.

Usado em: Exemplo 9.8 (Diagonalização ortogonal com um autovalor duplo)

`prop-pcar`

Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2)

Requer: Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T-\lambda I)=0$), Definição 8.10 (Polinômio característico)

Para $A=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)$: $p_A(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)$.

- $\lambda=3$: $A-3I=\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\1&-1\end{smallmatrix}\right)$, $V_3=[(1,1)]$.

- $\lambda = 1$: $A - I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $V_1 = [(1,-1)]$.

São as duas retas da figura da Motivação 8.3 (Onde a flecha não gira).

Usado em: Exemplo 8.33 (Potências, inversa e raízes quadradas por diagonalização), Nota 8.25 (Um operador diagonalizável estica cada eixo próprio), Nota 8.14 (Autovalores reais são as raízes reais de p_T)

Veja também: Motivação 8.3 (Onde a flecha não gira)

`ex-2x2`

Exemplo 8.13 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 3×3)

Requer: Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$), Definição 8.10 (Polinômio característico), Teorema 4.20 (Desenvolvimento de Laplace)

Para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda),$$

desenvolvendo pela terceira coluna. Os autoespaços, resolvendo $(A - \lambda I)X = 0$:

$$V_1 = [(1,0,-2)], \qquad V_2 = [(0,0,1)], \qquad V_3 = [(1,1,-2)].$$

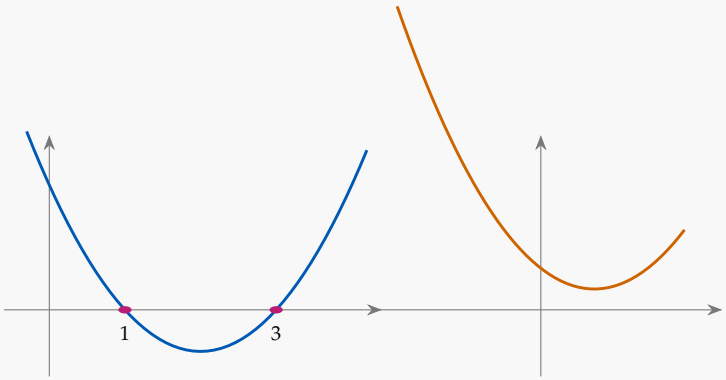
Confira um: $A(1,1,-2) = (3,3,-6)$.
O determinante sai com uma expansão só, porque a terceira coluna tem um único termo não nulo; em geral, o trabalho de calcular p_A é achar a expansão que fatora. Os três autovetores são LI (Teorema 8.15 (Autovetores de autovalores distintos são LI)), logo formam uma base, e nela a matriz é $\operatorname{diag}(1,2,3)$ (Definição 8.22 (Operador diagonalizável)).

Veja também: Teorema 8.15 (Autovetores de autovalores distintos são LI), Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

`ex-3x3`

Nota 8.14 (Autovalores reais são as raízes reais de p_T)

Requer: Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2)



$\lambda^2 - 4\lambda + 3$: *dois autovalores* rotação de 45°: *nenhum*

Os autovalores reais são as raízes reais de p_T. À esquerda, o polinômio do Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2). À direita, o da rotação de

$45°$, $\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1$, que não corta o eixo: suas raízes são complexas (Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)).

Veja também: Exemplo 8.21 (A rotação não tem autovalor real), Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

`nota-raizes-do-polinomio-caracteristico`

Teorema 8.15 (Autovetores de autovalores distintos são LI)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Definição 2.44 (Independência e dependência linear)

Se $v_1, \ldots, v_k$ são autovetores de T associados a autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, então $v_1, \ldots, v_k$ são LI.

Demonstração

Indução em k; para $k = 1$, $v_1 \neq 0$. Suponha o resultado para $k-1$ e seja

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0. \qquad (*)$$

Aplique $T - \lambda_k I$: como $(T - \lambda_k I)v_i = (\lambda_i - \lambda_k)v_i$,

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)v_{k-1} = 0.$$

Pela hipótese de indução, $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ para $i < k$, e como $\lambda_i \neq \lambda_k$, $a_i = 0$. Então $(*)$ vira $a_k v_k = 0$, e $a_k = 0$.
A ideia: aplicar $T - \lambda_k I$ *mata* o último termo e multiplica os outros por números não nulos. É um polinômio em T usado como ferramenta (Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores)).

Usado em: Corolário 8.16 (No máximo n autovalores; a soma dos autoespaços é direta)

Veja também: Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores)

`thm-li`

Corolário 8.16 (No máximo n autovalores; a soma dos autoespaços é direta)

Requer: Teorema 8.15 (Autovetores de autovalores distintos são LI), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Lema 2.53 (Lema da troca), Nota 2.32 (Soma direta de três ou mais subespaços)

Um operador em dimensão n tem no máximo n autovalores distintos, e a soma $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k}$ dos autoespaços é direta.

Demonstração

A primeira afirmação é o teorema com o lema da troca (Lema 2.53 (Lema da troca)). Para a segunda, se $w_1 + \cdots + w_k = 0$ com $w_i \in V_{\lambda_i}$, os w_i não nulos seriam autovetores de autovalores distintos com soma zero, contra o teorema; logo todos são nulos, que é a forma (c) da soma direta (Proposição 2.25 (Caracterizações da soma direta) e Nota 2.32 (Soma direta de três ou mais subespaços)).

Usado em: Teorema 8.23 (Critério de diagonalização) (dem.)

`cor-n`

Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores)

Requer: Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Para $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m$, escreva $p(T) = a_0 I + a_1 T + \cdots + a_m T^m$.

Se $Tv = \lambda v$, então $p(T)v = p(\lambda)v$. Em particular, se $p(T) = 0$, todo autovalor de T é raiz de p.

Demonstração

$T^j v = \lambda^j v$ por indução, e soma-se. Se $p(T) = 0$ e $v \neq 0$ é autovetor de λ, então $0 = p(\lambda)v$, logo $p(\lambda) = 0$.

Usado em: Corolário 8.18 (Autovalores de operadores nilpotentes, idempotentes e involuções), Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton), Teorema 8.62 (Polinômio mínimo)

`prop-poli`

Corolário 8.18 (Autovalores de operadores nilpotentes, idempotentes e involuções)

Requer: Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores)

(a) *Nilpotente ($T^k = 0$): o único autovalor possível é* 0.

(b) *Idempotente ($T^2 = T$): autovalores em* $\{0, 1\}$.

(c) *Involução ($T^2 = I$): autovalores em* $\{-1, 1\}$.

O corolário restringe os autovalores possíveis; não garante que existam. A recíproca de (a) vale em dimensão finita e falha para a derivada em $\mathcal{P}(\mathbb{R})$; a demonstração em dimensão finita usa Cayley–Hamilton (Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton)).

Usado em: Exemplo 8.19 (Os autoespaços da transposição)

Veja também: Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton), Proposição 2.36 (Operadores idempotentes são projeções)

`cor-tipos`

Exemplo 8.19 (Os autoespaços da transposição)

Requer: Corolário 8.18 (Autovalores de operadores nilpotentes, idempotentes e involuções), Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$), Exemplo 2.77 (Dimensão das matrizes simétricas e das antissimétricas)

Seja $\Theta : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\Theta(A) = A^t$. Como $\Theta^2 = I$, os autovalores estão em $\{1, -1\}$ (Corolário 8.18 (Autovalores de operadores nilpotentes, idempotentes e involuções)). E os dois ocorrem:

$$V_1 = \{A : A^t = A\} = \mathrm{Sim}, \qquad V_{-1} = \{A : A^t = -A\} = \mathcal{A}.$$

Como $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$ (Exemplo 2.28 ($\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathrm{Sim} \oplus \mathcal{A}$)), existe uma base de autovetores de Θ: junte uma base de Sim e uma de $\mathcal{A}$. Nela,

$$[\Theta] = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n(n+1)/2}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{n(n-1)/2}),$$

e daí, sem conta, $\operatorname{tr}\Theta = n$ e $\det\Theta = (-1)^{n(n-1)/2}$ — o valor obtido com esforço no Exemplo 4.30 (O determinante da transposição).
A decomposição em parte simétrica e antissimétrica *é* a diagonalização de Θ. O mesmo vale para funções pares e ímpares: são os autoespaços de $f(x) \mapsto f(-x)$ (Nota 2.30 (Simétrica e antissimétrica, par e ímpar: a mesma conta)).

Veja também: Exemplo 4.30 (O determinante da transposição), Nota 2.30 (Simétrica e antissimétrica, par e ímpar: a mesma conta)

`ex-transposicao-autovalores`

Exemplo 8.20 (Dois operadores que derivam: D e $x\,D$)

Requer: Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T-\lambda I)=0$), Definição 8.10 (Polinômio característico), Exemplo 3.4 (A matriz da derivada em duas bases), Proposição 4.12 (Determinante de uma matriz triangular)

Em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, na base $(1, x, x^2, x^3)$:

- $D(p) = p'$ tem matriz triangular com diagonal nula (Exemplo 3.4 (A matriz da derivada em duas bases)), logo $p_D(\lambda) = \lambda^4$; o único autovalor é 0, com $V_0 = \mathrm{N}(D)$ = constantes, de dimensão 1. Não há base de autovetores. (Coerente: $D^4 = 0$.)
- $M(p) = xp'(x)$ satisfaz $M(x^k) = kx^k$: a própria base é de autovetores, com autovalores $0, 1, 2, 3$, e $[M] = \operatorname{diag}(0, 1, 2, 3)$.

Os dois operadores "derivam"; um tem uma base de autovetores e o outro, nenhuma.

`ex-derivada-matriz-nilpotente`

Exemplo 8.21 (A rotação não tem autovalor real)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico), Exemplo 3.11 (Rotações e as fórmulas de adição)

A rotação. $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1$, de discriminante $4\cos^2\theta - 4 < 0$ para $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Nenhum autovalor real: é o fenômeno da figura da Nota 8.14 (Autovalores reais são as raízes reais de p_T); veja o Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante).

Veja também: Nota 8.14 (Autovalores reais são as raízes reais de p_T), Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

`ex-rotacao-sem-autovalor-real`

Diagonalização

Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

Requer: Definição 3.2 (Matriz de uma transformação linear)

$T : V \to V$ é **diagonalizável** se existe uma base B de V com $[T]_B$ diagonal. Uma matriz A é diagonalizável se existem P invertível e D diagonal com $A = PDP^{-1}$ (isto é, se T_A é diagonalizável; Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador)).

Usado em: Corolário 8.24 (n autovalores distintos bastam para diagonalizar), Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg = ma), Exemplo 8.44 (Os subespaços invariantes de quatro operadores de $\mathbb{R}^2$), Exercício 8.67 (Todo operador idempotente é diagonalizável?), Exercício 8.68 (Se T^2 é diagonalizável, então T é diagonalizável?), Proposição 8.46 (Operadores que comutam), Proposição 8.32 (Potências de uma matriz diagonalizável), Teorema 8.23 (Critério de diagonalização), Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples)

Veja também: Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal), Corolário 3.16 (Matrizes semelhantes representam o mesmo operador)

`def-diag`

Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)

Requer: Definição 8.22 (Operador diagonalizável), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Definição 2.24 (Soma direta)

A demonstração exige: Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal), Corolário 8.16 (No máximo n autovalores; a soma dos autoespaços é direta), Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço), Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam)

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ os autovalores distintos de T, com $\dim V = n$. São equivalentes:

(a) *T é diagonalizável;*

(b) *V tem uma base formada por autovetores de T;*

(c) $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$;

(d) $\dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_k} = n$.

Demonstração

(a) $\iff$ (b): $[T]_B = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_n)$ significa $T(v_j) = c_j v_j$ para cada j (Nota 3.18 (Quando a matriz de um operador é diagonal)), isto é, cada v_j é autovetor.

(b)$\Rightarrow$(d): cada vetor da base está em algum V_{λ_i}, e os que estão em V_{λ_i} são LI; logo $\dim V_{\lambda_i} \geq$ número deles, e somando, $\sum_i \dim V_{\lambda_i} \geq n$. A soma dos autoespaços é direta (Corolário 8.16 (No máximo n autovalores; a soma dos autoespaços é direta)), logo tem dimensão $\sum_i \dim V_{\lambda_i} \leq n$.

(d)$\Rightarrow$(c): a soma é direta, e sua dimensão é n; um subespaço de dimensão n é V (Corolário 2.82 (Dimensão de um subespaço)).

(c)$\Rightarrow$(b): junte bases dos V_{λ_i}; numa soma direta, a junção de bases é base (Corolário 2.86 (A soma é direta quando as dimensões se somam)).

Usado em: Motivação 8.37 (Quando não dá para diagonalizar), Nota 8.25 (Um operador diagonalizável estica cada eixo próprio), Corolário 8.24 (n autovalores distintos bastam para diagonalizar) (dem.), Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg $=$ ma) (dem.), Proposição 8.46 (Operadores que comutam) (dem.), Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples) (dem.)

`thm-crit`

Corolário 8.24 (n autovalores distintos bastam para diagonalizar)

Requer: Definição 8.22 (Operador diagonalizável), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

A demonstração exige: Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)

Se T tem n autovalores distintos, T é diagonalizável. A recíproca é falsa.

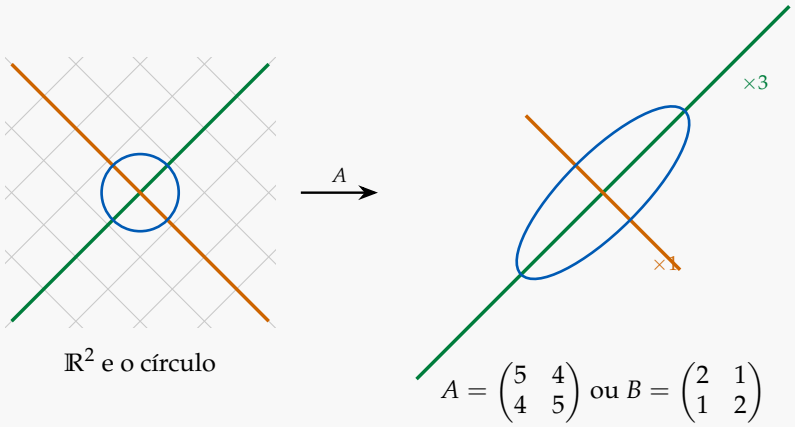
Demonstração

Cada $\dim V_{\lambda_i} \geq 1$, e há n deles: a soma é $\geq n$, logo $= n$. Para a recíproca: a identidade é diagonal e tem um só autovalor.

`cor-distintos`

Nota 8.25 (Um operador diagonalizável estica cada eixo próprio)

Requer: Teorema 8.23 (Critério de diagonalização), Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2)



$\mathbb{R}^2$ e o círculo

$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Um operador diagonalizável estica (ou encolhe) cada eixo próprio por um fator, independentemente dos outros. O círculo vira uma elipse com os eixos nas direções dos autovetores. O desenho é o de $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ (fatores 3 e 1, Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2)); $A = B^2$ tem os mesmos eixos e fatores 9 e 1 (Exemplo 8.33 (Potências, inversa e raízes quadradas por diagonalização)).
É o que dá sentido à palavra "diagonal": nas coordenadas dadas pelos dois eixos coloridos, A multiplica a primeira coordenada por 9 e a segunda por 1, sem misturar.

Veja também: Exemplo 8.33 (Potências, inversa e raízes quadradas por diagonalização)

`nota-eixos-proprios`

Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Seja λ_0 autovalor de T. A **multiplicidade algébrica** $\mathrm{ma}(\lambda_0)$ é a multiplicidade de λ_0 como raiz de p_T; a **multiplicidade geométrica** $\mathrm{mg}(\lambda_0)$ é $\dim V_{\lambda_0}$.

Usado em: Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg = ma), Exemplo 9.8 (Diagonalização ortogonal com um autovalor duplo), Exercício 8.36 (Autoespaço de dimensão 1 implica multiplicidade algébrica 1?), Exercício 8.35 (Multiplicidade algébrica 1 implica autoespaço de dimensão 1?), Proposição 8.27 ($1 \leq \mathrm{mg} \leq \mathrm{ma}$)

`def-mult`

Proposição 8.27 ($1 \leq \mathrm{mg} \leq \mathrm{ma}$)

Requer: Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica)

A demonstração exige: Teorema 2.79 (Teorema do completamento), Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos), Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos)

$$1 \leq \mathrm{mg}(\lambda_0) \leq \mathrm{ma}(\lambda_0).$$

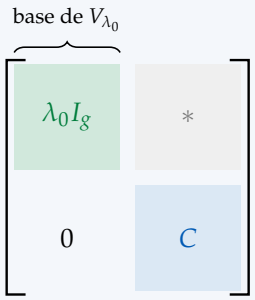
Demonstração

$\mathrm{mg} \geq 1$ porque λ_0 é autovalor. Seja $g = \dim V_{\lambda_0}$ e complete uma base de V_{λ_0} a uma base B de

V. Como V_{λ_0} é invariante e T age nele como $\lambda_0 I$, a matriz é triangular por blocos (Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos)):

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_0 I_g & * \\ 0 & C \end{pmatrix}, \qquad p_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^g \, p_C(\lambda),$$

pelo determinante de matriz triangular por blocos (Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos)). Logo $(\lambda - \lambda_0)^g$ divide p_T, e ma $\geq g$.



$p_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^g \, p_C(\lambda)$
λ_0 pode ainda ser raiz de p_C: é aí que ma *passa de* mg

Por que mg $\leq$ ma. *Numa base que começa pelo autoespaço, o bloco verde contribui $(\lambda_0 - \lambda)^g$ ao polinômio característico. O bloco azul pode contribuir mais fatores $(\lambda_0 - \lambda)$ — no exemplo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $C = (1)$ contribui um.*

Usado em: Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg = ma) (dem.), Exercício 8.35 (Multiplicidade algébrica 1 implica autoespaço de dimensão 1?) (dem.)

`prop-mult`

Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg = ma)

Requer: Definição 8.22 (Operador diagonalizável), Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica)

A demonstração exige: Teorema 8.23 (Critério de diagonalização), Proposição 8.27 ($1 \leq$ mg $\leq$ ma)

T é diagonalizável se e somente se p_T se fatora em fatores lineares reais e $\text{mg}(\lambda_i) = \text{ma}(\lambda_i)$ para todo autovalor.

Demonstração

Se $p_T = \pm\prod_i (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, então $\sum_i m_i = n$, e $\sum_i \dim V_{\lambda_i} \leq \sum_i m_i = n$ com igualdade se e somente se cada $\dim V_{\lambda_i} = m_i$. Se p_T não se fatora sobre $\mathbb{R}$, $\sum_i m_i < n$ e o Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)(d) falha.

Usado em: Exemplo 8.29 (Uma matriz 2×2 que não é diagonalizável), Exemplo 8.30 (Uma matriz 3×3 diagonalizável com autovalor duplo), Exemplo 8.31 (Raízes reais, mas não diagonalizável)

`cor-multdiag`

Exemplo 8.29 (Uma matriz 2×2 que não é diagonalizável)

Requer: Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg = ma)

$J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$: $p_J = (1 - \lambda)^2$, $\text{ma}(1) = 2$, mas $J - I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tem núcleo $[e_1]$: $\text{mg}(1) = 1$. *Não é diagonalizável.* (Se fosse, seria $P\,I\,P^{-1} = I$.)

Usado em: Exercício 8.36 (Autoespaço de dimensão 1 implica multiplicidade algébrica 1?) (dem.)

Veja também: Exemplo 8.7 (Cisalhamento: um só autoespaço)

`ex-mult-a`

Exemplo 8.30 (Uma matriz 3×3 diagonalizável com autovalor duplo)

Requer: Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg = ma), Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$: desenvolvendo pela segunda coluna, $p_A = (3-\lambda)\big((4-\lambda)^2 - 1\big) = (3-\lambda)^2(5-\lambda)$. Para $\lambda = 3$, $A - 3I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tem posto 1, logo $\operatorname{mg}(3) = 2 = \operatorname{ma}(3)$, com $V_3 = [(0,1,0), (-1,0,1)]$; e $V_5 = [(1,2,1)]$. *Diagonalizável.*

ex-mult-b

Exemplo 8.31 (Raízes reais, mas não diagonalizável)

Requer: Corolário 8.28 (Diagonalizável: raízes reais e mg = ma), Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

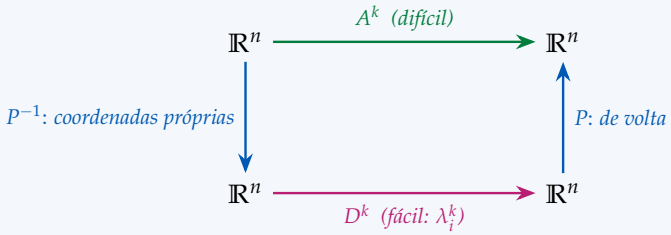
$A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$: $p_{A'} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$, mas $A' - 2I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tem posto 2, logo $\operatorname{mg}(2) = 1 < 2$. *Não é diagonalizável*, embora $p_{A'}$ tenha todas as raízes reais.

ex-mult-c

Proposição 8.32 (Potências de uma matriz diagonalizável)

Requer: Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

Se $A = PDP^{-1}$ com $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então $A^k = PD^kP^{-1}$ para todo $k \geq 0$, e $D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$. Se todos os $\lambda_i \neq 0$, isso vale também para $k < 0$.



O desvio do Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$), agora com propósito: para calcular A^k, passe às coordenadas em que A é diagonal, eleve n números à potência k, e volte.

Demonstração

Temos $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$, e o resto é indução. Para $k = -1$, basta ver que $(PDP^{-1})(PD^{-1}P^{-1}) = I$.

Usado em: Exemplo 8.33 (Potências, inversa e raízes quadradas por diagonalização), Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização)

Veja também: Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$)

prop-funcoes

Exemplo 8.33 (Potências, inversa e raízes quadradas por diagonalização)

Requer: Proposição 8.32 (Potências de uma matriz diagonalizável), Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2)

$A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$: $p_A = (5-\lambda)^2 - 16 = (\lambda - 9)(\lambda - 1)$, $V_9 = [(1,1)]$, $V_1 = [(1,-1)]$. Com

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}:$$

- $A^{100} = PD^{100}P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 9^{100}+1 & 9^{100}-1 \\ 9^{100}-1 & 9^{100}+1 \end{pmatrix}$.
- $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ (confira: $AA^{-1} = I$).
- Uma raiz quadrada: $B = P\,\mathrm{diag}(3,1)\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e de fato $B^2 = A$. É a matriz do Exemplo 8.12 (Autovalores e autoespaços de uma matriz 2×2).

Quantas raízes quadradas A tem? Se $B^2 = A$, então $BA = B^3 = AB$, e B preserva os autoespaços de A (Proposição 8.46 (Operadores que comutam)); como eles têm dimensão 1, B é diagonal na base P, com $B = P\,\mathrm{diag}(\pm 3, \pm 1)\,P^{-1}$. São exatamente quatro.
Na fórmula de A^{100}, o termo 9^{100} domina: A^{100} é praticamente $\frac{9^{100}}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, uma matriz de posto 1 que projeta sobre V_9. É o fenômeno do autovalor dominante, que reaparece no Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização).

Veja também: Proposição 8.46 (Operadores que comutam), Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização)

ex-5445

Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização)

Requer: Proposição 8.32 (Potências de uma matriz diagonalizável), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{logo} \qquad \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

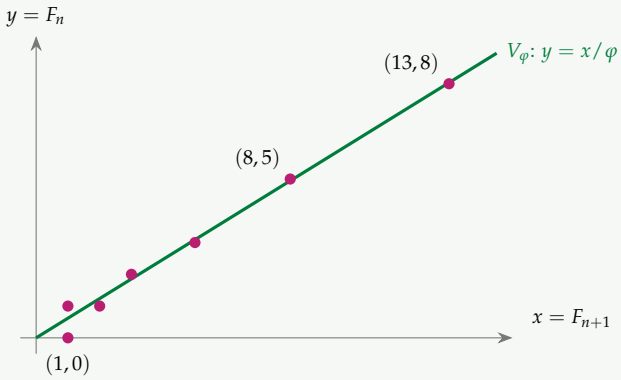
$p_A = \lambda^2 - \lambda - 1$, com raízes $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como $\lambda^2 = \lambda + 1$ para essas raízes, os autovetores são $(\varphi, 1)$ e $(\psi, 1)$ (confira: $A(\lambda, 1) = (\lambda + 1, \lambda) = \lambda(\lambda, 1)$). Escrevendo o vetor inicial nessa base,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}\right],$$

porque $\varphi - \psi = \sqrt{5}$. Aplicando A^n, cada autovetor se multiplica pela potência do seu autovalor, e a segunda coordenada dá

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.$$

Como $|\psi| < 1$, $\psi^n \to 0$, e $F_{n+1}/F_n \to \varphi$: a razão áurea é o autovalor dominante.



Os pares (F_{n+1}, F_n) são as potências $A^n(1,0)$. A componente na direção de $(\psi, 1)$ encolhe (fator $|\psi| \approx 0{,}62$) e a na direção de $(\varphi, 1)$ cresce (fator $\varphi \approx 1{,}62$): os pontos se alinham rapidamente com a reta V_φ, cuja inclinação é $1/\varphi$.

Por exemplo, $F_{10} = 55$ pela fórmula, com $\varphi^{10} \approx 122{,}99$: a expressão com $\sqrt{5}$ dá sempre inteiros. Toda recorrência linear de coeficientes constantes se resolve assim.

Usado em: Exemplo 8.61 (Potências da matriz de Fibonacci)

Veja também: Exemplo 1.24 (Sequências convergentes e sequências de Fibonacci)

`ex-fib`

Exercício 8.35 (Multiplicidade algébrica 1 implica autoespaço de dimensão 1?)

Requer: Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica)

A demonstração exige: Proposição 8.27 ($1 \leq \text{mg} \leq \text{ma}$)

Verdadeiro ou falso? *Se λ é autovalor de T com multiplicidade algébrica 1, então* $\dim V_\lambda = 1$.

Resolução

Verdadeira. Pela Proposição 8.27 ($1 \leq \text{mg} \leq \text{ma}$), $1 \leq \dim V_\lambda \leq 1$.

`exerc-multiplicidade-algebrica-um`

Exercício 8.36 (Autoespaço de dimensão 1 implica multiplicidade algébrica 1?)

Requer: Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica)

A demonstração exige: Exemplo 8.29 (Uma matriz 2×2 que não é diagonalizável)

Verdadeiro ou falso? *Se* $\dim V_\lambda = 1$, *então λ tem multiplicidade algébrica* 1.

Resolução

Falsa. A matriz do Exemplo 8.29 (Uma matriz 2×2 que não é diagonalizável), $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ tem $\dim V_1 = 1$ e $p_J = (1-\lambda)^2$.

`exerc-autoespaco-de-dimensao-um`

Subespaços invariantes e autovalores complexos

Motivação 8.37 (Quando não dá para diagonalizar)

Requer: Teorema 8.23 (Critério de diagonalização), Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real),

Exemplo 8.7 (Cisalhamento: um só autoespaço)

T é diagonalizável se e somente se os autoespaços somam V (Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)). Há dois obstáculos: a rotação (sem autovalores reais, Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real)) e o cisalhamento (autovalores reais, poucos autovetores, Exemplo 8.7 (Cisalhamento: um só autoespaço)). Diagonalizar é o caso em que V se parte em retas invariantes. Em geral, procura-se partir V em pedaços invariantes (Definição 8.38 (Subespaço invariante)) tão pequenos quanto possível.

Usado em: Nota 9.4 (Como a auto-adjunção remove os dois obstáculos)

Veja também: Definição 8.38 (Subespaço invariante)

`mot-invariantes`

Definição 8.38 (Subespaço invariante)

Requer: Definição 2.2 (Subespaço vetorial), Definição 1.36 (Transformação linear)

Um subespaço $S \subset V$ é **invariante** por T se $T(S) \subset S$. Nesse caso $T|_S : S \to S$ é um operador em S.

Usado em: Corolário 8.51 (Todo operador real tem um invariante de dimensão 1 ou 2), Corolário 8.66 (Involuções e projeções são diagonalizáveis), Exemplo 8.39 (Núcleo, imagem e autoespaços são invariantes), Exemplo 8.40 (Uma reta é invariante quando é gerada por um autovetor), Exemplo 8.41 (Interseção e soma de invariantes são invariantes), Exemplo 8.42 (Para a derivada, cada $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ é invariante), Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^\perp$ também é), Proposição 8.46 (Operadores que comutam), Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T), Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais), Proposição 8.45 (Somas diretas invariantes e projeções), Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante), Teorema 8.54 (Triangularização)

Veja também: Motivação 8.37 (Quando não dá para diagonalizar), Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos)

`def-inv`

Exemplo 8.39 (Núcleo, imagem e autoespaços são invariantes)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

São invariantes por T: $\{0\}$ e V; $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$; cada autoespaço V_λ (se $Tv = \lambda v$, então $T(Tv) = \lambda Tv$).

`ex-inv-a`

Exemplo 8.40 (Uma reta é invariante quando é gerada por um autovetor)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Uma reta $[v]$ é invariante se e somente se v é autovetor.

Usado em: Exemplo 8.44 (Os subespaços invariantes de quatro operadores de $\mathbb{R}^2$), Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante) (dem.)

`ex-inv-b`

Exemplo 8.41 (Interseção e soma de invariantes são invariantes)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 2.19 (Soma de subespaços)

Se S_1, S_2 são invariantes, $S_1 \cap S_2$ e $S_1 + S_2$ também são.

`ex-inv-c`

Exemplo 8.42 (Para a derivada, cada $\mathcal{P}_k(\mathbb{R})$ é invariante)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Exemplo 1.39 (A derivada é linear)

Para a derivada em $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, cada $P_k(\mathbb{R})$, $k \leq n$, é invariante.

`ex-inv-d`

Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 8.10 (Polinômio característico), Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos)

A demonstração exige: Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos)

Seja S invariante, B_S base de S completada a uma base B de V. Então

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_S]_{B_S} & * \\ 0 & [\bar{T}] \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad p_T = p_{T|_S} \cdot p_{\bar{T}}.$$

Para conhecer os autovalores de T basta conhecer os de $T|_S$ e os de $\bar{T}$, que vivem em espaços menores. É o motor das demonstrações por indução na dimensão: a triangularização (Teorema 8.54 (Triangularização)) e o teorema espectral (Teorema 9.5 (Teorema espectral)).

Demonstração

A forma da matriz é a Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos). Para o polinômio, $[T]_B - \lambda I$ é triangular por blocos com blocos diagonais $[T|_S] - \lambda I$ e $[\bar{T}] - \lambda I$, e o determinante de uma matriz triangular por blocos é o produto dos determinantes dos blocos (Proposição 4.28 (Determinante de uma matriz triangular por blocos)).

Usado em: Teorema 8.54 (Triangularização) (dem.)

Veja também: Teorema 8.54 (Triangularização), Teorema 9.5 (Teorema espectral)

`prop-matriz-em-blocos-de-invariante`

Exemplo 8.44 (Os subespaços invariantes de quatro operadores de $\mathbb{R}^2$)

Requer: Exemplo 8.40 (Uma reta é invariante quando é gerada por um autovetor), Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

Em $\mathbb{R}^2$, os subespaços invariantes triviais são $\{0\}$ e $\mathbb{R}^2$; os outros são retas, e uma reta é invariante se e somente se é gerada por um autovetor. Então:

(a) *Rotação* de $\theta \in (0, \pi)$: nenhum autovetor real; só os triviais.

(b) *Cisalhamento* $T(x, y) = (x + y, y)$: autovetores só no eixo x; os invariantes são $\{0\}$, o eixo x e $\mathbb{R}^2$.

(c) $T(x, y) = (2x, 3y)$: dois autoespaços de dimensão 1; os invariantes são $\{0\}$, os dois eixos e $\mathbb{R}^2$.

(d) $T = I$: toda reta é invariante.

Só em (c) e (d) $\mathbb{R}^2$ é soma direta de duas retas invariantes — e são exatamente os diagonalizáveis.

As retas invariantes nos quatro casos típicos de $\mathbb{R}^2$. Zero, uma, duas ou infinitas. Os dois últimos são diagonalizáveis; o primeiro falha por falta de autovalores reais, o segundo por falta de autovetores.

Um operador de $\mathbb{R}^2$ não pode ter exatamente três retas invariantes: se há três, há dois autovetores LI; se os autovalores fossem distintos, um terceiro autovetor teria de estar num dos dois autoespaços; logo os autovalores são iguais e $T = \lambda I$.

Veja também: Nota 8.8 (Quatro operadores de $\mathbb{R}^2$ e os seus autoespaços)

`ex-q15`

Proposição 8.45 (Somas diretas invariantes e projeções)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)

Seja $V = S_1 \oplus S_2$ e π_1, π_2 as projeções (Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta)). Então S_1 e S_2 são invariantes por T se e somente se $\pi_i T = T\pi_i$ para $i = 1, 2$. Nesse caso, numa base formada por uma base de S_1 seguida de uma de S_2,

$$[T] = \begin{pmatrix} [T|_{S_1}] & 0 \\ 0 & [T|_{S_2}] \end{pmatrix}.$$

Diagonalizar é o caso em que V se parte em retas invariantes. Em geral, procura-se partir V em pedaços invariantes tão pequenos quanto possível.

Demonstração

Se os S_i são invariantes e $v = s_1 + s_2$, então $Tv = Ts_1 + Ts_2$ com $Ts_i \in S_i$, logo $\pi_1 Tv = Ts_1 = T\pi_1 v$. Reciprocamente, se $\pi_1 T = T\pi_1$ e $s \in S_1$, então $Ts = T\pi_1 s = \pi_1 Ts \in S_1$. A forma da matriz: as colunas da primeira parte têm coordenadas só em S_1, e as da segunda só em S_2.

`prop-somainv`

Proposição 8.46 (Operadores que comutam)

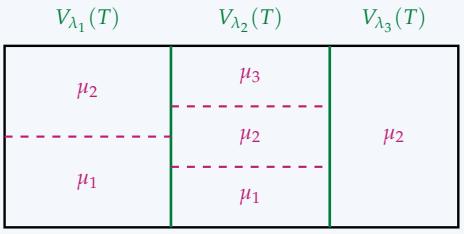
Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço), Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

A demonstração exige: Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)

Sejam $S, T : V \to V$ com $ST = TS$.

(a) *Cada autoespaço de T é invariante por S.*

(b) *Se S e T são diagonalizáveis, existe uma base de autovetores comuns.*



V se parte nos autoespaços de T (verde); cada um deles se parte nos de S (rosa); em cada caixinha, $T = \lambda_i$ e $S = \mu_j$

A diagonalização simultânea. Porque S preserva cada autoespaço de T, a decomposição de V segundo S refina a decomposição segundo T, e o resultado é um quadriculado de pedaços em que os dois operadores são escalares.

Demonstração

(a) Se $Tv = \lambda v$, então $T(Sv) = S(Tv) = \lambda Sv$.

(b) Sejam $\mu_1, \dots, \mu_l$ os autovalores de S, e $V = \bigoplus_j V_{\mu_j}(S)$. Fixe um autovalor λ de T e $v \in V_\lambda(T)$; escreva $v = \sum_j w_j$ com $w_j \in V_{\mu_j}(S)$. Por (a), com os papéis trocados, T preserva cada $V_{\mu_j}(S)$; logo

$$0 = (T - \lambda I)v = \sum_j (T - \lambda I)w_j, \qquad (T - \lambda I)w_j \in V_{\mu_j}(S).$$

Como a soma é direta, cada $(T - \lambda I)w_j = 0$: os w_j estão em $V_\lambda(T) \cap V_{\mu_j}(S)$. Portanto $V_\lambda(T) = \bigoplus_j \big(V_\lambda(T) \cap V_{\mu_j}(S)\big)$. Juntando bases desses pedaços, para todos os λ, obtém-se uma base de V formada por vetores que são autovetores de T e de S ao mesmo tempo.

Usado em: Exemplo 8.47 (Diagonalizáveis que não comutam, sem autovetor comum), Exemplo 8.48 (Comutar não basta para ter um autovetor real comum)

`prop-comuta`

Exemplo 8.47 (Diagonalizáveis que não comutam, sem autovetor comum)

Requer: Proposição 8.46 (Operadores que comutam)

$S = \operatorname{diag}(1, -1)$ e $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ são diagonalizáveis (autovetores e_1, e_2 e $(1, \pm 1)$), não comutam ($ST = -TS \neq TS$), e não têm autovetor comum.

`ex-nao comuta-a`

Exemplo 8.48 (Comutar não basta para ter um autovetor real comum)

Requer: Proposição 8.46 (Operadores que comutam), Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real)

Comutar não basta para ter um autovetor *real* comum: duas rotações de $\mathbb{R}^2$ comutam e nenhuma tem autovetor real.

`ex-nao comuta-b`

Exemplo 8.49 (Rotação com dilatação: a matriz de $a + ib$)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico), Exemplo 3.11 (Rotações e as fórmulas de adição)

$A = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$, $b \neq 0$: $p_A = (a - \lambda)^2 + b^2$, sem raízes reais, com raízes complexas $a \pm ib$. Com $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e θ tal que $\cos\theta = a/r$, $\operatorname{sen}\theta = b/r$,

$$A = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} :$$

uma rotação de θ seguida de uma dilatação por r. Identificando $\mathbb{R}^2$ com $\mathbb{C}$, é a multiplicação pelo complexo $a + ib$.

Usado em: Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

`ex-ab`

Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Exemplo 8.49 (Rotação com dilatação: a matriz de $a + ib$)

A demonstração exige: Teorema 4.11 (det $A \neq 0$ equivale a A invertível), Exemplo 8.40 (Uma reta é invariante quando é gerada por um autovetor)

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$, uma raiz de p_A. Seja $z = u + iw \in \mathbb{C}^n$ ($u, w \in \mathbb{R}^n$) com $Az = \lambda z$, $z \neq 0$. Então u e w são LI, o plano $S = [u, w]$ é invariante, e na base (w, u)

$$[A|_S] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Demonstração

Um z assim existe: $\det(A - \lambda I) = 0$ sobre $\mathbb{C}$, e o sistema $(A - \lambda I)z = 0$ tem solução não nula em $\mathbb{C}^n$ (a teoria de dimensão, sistemas lineares e determinantes vale sobre $\mathbb{C}$ sem mudança). Separando partes real e imaginária em $A(u + iw) = (a + ib)(u + iw)$, e usando que A é real,

$$Au = au - bw, \qquad Aw = bu + aw.$$

Logo $S = [u, w]$ é invariante, e na base (w, u) as colunas são $[Aw] = (a, b)$ e $[Au] = (-b, a)$. Resta ver que u, w são LI. Se não fossem, S seria uma reta (não é $\{0\}$, porque $z \neq 0$) invariante, gerada por um x com $Ax = \mu x$, μ real; e z, sendo combinação complexa de u e w, seria um múltiplo complexo de x, donde $Az = \mu z$ e $\lambda = \mu \in \mathbb{R}$, contra $b \neq 0$.

Usado em: Exemplo 8.52 (Autovalores $2 \pm i$: uma rotação numa base torta), Nota 9.11 (A forma geral de uma matriz ortogonal), Corolário 8.51 (Todo operador real tem um invariante de dimensão 1 ou 2) (dem.)

`thm-complexo`

Corolário 8.51 (Todo operador real tem um invariante de dimensão 1 ou 2)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 8.10 (Polinômio característico)

A demonstração exige: Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

Todo operador em $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) tem um subespaço invariante de dimensão 1 ou 2. Se n é ímpar, todo operador em $\mathbb{R}^n$ tem um autovetor real.

Demonstração

p_T tem uma raiz complexa (teorema fundamental da álgebra). Se é real, há um autovetor; se não, o teorema dá um plano. Se n é ímpar, p_T tem grau ímpar e coeficientes reais, logo tem uma raiz real (valor intermediário: $p_T(\lambda)$ tem sinais opostos para $\lambda \to \pm\infty$).

`cor-12`

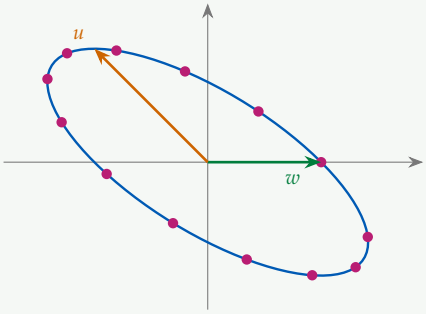
Exemplo 8.52 (Autovalores $2 \pm i$: uma rotação numa base torta)

Requer: Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$: $p_A = \lambda^2 - 4\lambda + 5$, raízes $2 \pm i$. Para $\lambda = 2 + i$, a segunda linha de $A - \lambda I$ dá $z_1 + (1 - i)z_2 = 0$; com $z_2 = 1$, $z = (-1 + i,\ 1) = u + iw$ com $u = (-1, 1)$, $w = (1, 0)$. Confira: $Au = (-3, 2) = 2u - w$ e $Aw = (1, 1) = u + 2w$. Na base (w, u),

$$[A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \cos\theta = \tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

A é uma rotação com dilatação — *nas coordenadas* (w, u). Nas coordenadas usuais, as órbitas de $A/\sqrt{5}$ são elipses.



pontos: $x_k = (A/\sqrt{5})^k\, w$
na base (w, u) *cada passo é uma rotação de* $\theta \approx 26{,}6°$

A órbita de w pelas potências de $A/\sqrt{5}$. Na base (w, u) ela percorre um círculo; desenhada nas coordenadas usuais, o círculo vira a elipse $\{\cos t\, w + \operatorname{sen} t\, u\}$. Sem a divisão por $\sqrt{5}$, os pontos se afastariam em espiral.

Uma matriz sem autovalores reais "gira" mesmo quando não parece uma rotação: ela é uma rotação com dilatação numa base torta. É a versão 2×2 do Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante): cada par de raízes complexas conjugadas dá um plano onde T faz isso.

`ex-espiral`

Cayley–Hamilton e polinômio mínimo

Nota 8.53 (Escalares complexos)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico)

O teorema fundamental da álgebra dá raízes complexas de p_T. E todas as definições e resultados sobre espaços vetoriais, transformações lineares, determinantes e autovalores valem sobre $\mathbb{C}$ sem mudança, trocando $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$ como corpo de escalares.

Veja também: Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

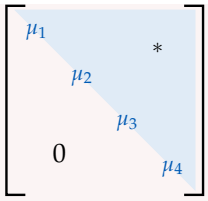
`nota-escalares-complexos`

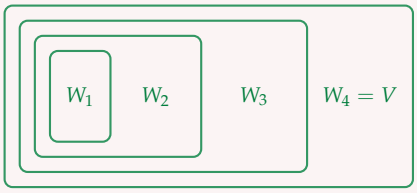
Teorema 8.54 (Triangularização)

Requer: Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 8.10 (Polinômio característico)

A demonstração exige: Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$), Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T), Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)

Seja $T : V \to V$, com V complexo de dimensão n — ou com V real e p_T se fatorando em fatores lineares reais. Existe uma base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ com $[T]_B$ triangular superior. Equivalentemente, os subespaços $W_j = [v_1, \ldots, v_j]$ são todos invariantes.





Forma triangular e bandeira invariante: a matriz é triangular superior na base $(v_1, \dots, v_n)$ exatamente quando cada $W_j = [v_1, \dots, v_j]$ é invariante. A diagonal traz os autovalores, com multiplicidade.

A estratégia da demonstração é a mesma do teorema espectral (Teorema 9.5 (Teorema espectral)): ache um autovetor, passe ao quociente (ou ao complemento ortogonal), use indução.

Demonstração

Indução em n; para $n = 1$ não há o que fazer. Pela hipótese, p_T tem uma raiz μ_1, que é autovalor; seja v_1 um autovetor. A reta $[v_1]$ é invariante, e T induz $\bar{T}$ em $V/[v_1]$, de dimensão $n-1$ (Proposição 5.56 (Operador induzido no quociente e matriz em blocos)). Como $p_T = (\mu_1 - \lambda)\, p_{\bar{T}}$ (Proposição 8.43 (Subespaço invariante: matriz em blocos e fatoração de p_T)), $p_{\bar{T}}$ também se fatora. Pela hipótese de indução há uma base $(\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ de $V/[v_1]$ em que $[\bar{T}]$ é triangular superior; escolha representantes $v_2, \dots, v_n$. Então $(v_1, \dots, v_n)$ é base de V (Proposição 5.42 (Dimensão do quociente: $\dim V/S = \dim V - \dim S$)), e $T(v_j) \equiv$ combinação de $v_2, \dots, v_j$ módulo $[v_1]$, isto é, $T(v_j) \in [v_1, \dots, v_j]$: a matriz é triangular superior.

Usado em: Corolário 8.55 (Traço e determinante: soma e produto das raízes de p_T), Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton) (dem.)

Veja também: Nota 8.53 (Escalares complexos), Teorema 9.5 (Teorema espectral)

`thm-triang`

Corolário 8.55 (Traço e determinante: soma e produto das raízes de p_T)

Requer: Teorema 8.54 (Triangularização)

A demonstração exige: Proposição 4.12 (Determinante de uma matriz triangular)

As entradas diagonais $\mu_1, \dots, \mu_n$ de uma forma triangular são as raízes de p_T com multiplicidade. Portanto $\operatorname{tr} T = \sum_i \mu_i$ e $\det T = \prod_i \mu_i$ (somas e produtos das raízes complexas de p_T).

Demonstração

$p_T(\lambda) = \det([T]_B - \lambda I) = \prod_i (\mu_i - \lambda)$, determinante de triangular.

Usado em: Proposição 9.31 (O tipo da cônica $q = 1$ pelo determinante e pelo traço) (dem.)

`cor-trdet`

Exemplo 8.56 (Cayley–Hamilton para matrizes 2×2)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico)

Para $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$, e uma conta direta dá

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0.$$

Veja também: Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton)

ex-ch2

Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico), Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores)

A demonstração exige: Teorema 8.54 (Triangularização)

Para todo operador T em dimensão finita, $p_T(T) = 0$.

Demonstração

Primeiro sobre $\mathbb{C}$. Pelo Teorema 8.54 (Triangularização), há uma base com $[T]$ triangular superior, com diagonal $\mu_1, \dots, \mu_n$, e $p_T(\lambda) = \prod_i (\mu_i - \lambda)$; logo $p_T(T) = \pm(T - \mu_1 I)\cdots(T - \mu_n I)$. Afirmamos que

$$(T - \mu_1 I)\cdots(T - \mu_j I) \text{ anula } W_j \qquad (j = 1, \dots, n).$$

Para $j = 1$: v_1 é autovetor de μ_1. Suponha para $j-1$. A coluna j da matriz diz que $T(v_j) = \mu_j v_j +$ (algo em W_{j-1}), isto é, $(T - \mu_j I)v_j \in W_{j-1}$; e $(T - \mu_j I)W_{j-1} \subset W_{j-1}$ porque W_{j-1} é invariante. Logo $(T - \mu_j I)W_j \subset W_{j-1}$. Como polinômios em T comutam,

$$\begin{aligned}(T - \mu_1 I)\cdots(T - \mu_j I)W_j &= (T - \mu_1 I)\cdots(T - \mu_{j-1} I)\big[(T - \mu_j I)W_j\big] \\ &\subset (T - \mu_1 I)\cdots(T - \mu_{j-1} I)W_{j-1} = 0.\end{aligned}$$

Com $j = n$, $W_n = V$ e $p_T(T) = 0$.

Caso real. Se A é uma matriz real, ela também é complexa, com o mesmo polinômio característico; a identidade $p_A(A) = 0$ entre matrizes vale sobre $\mathbb{C}$, e as entradas são reais.

$$W_4 \xrightarrow{T-\mu_4 I} W_3 \xrightarrow{T-\mu_3 I} W_2 \xrightarrow{T-\mu_2 I} W_1 \xrightarrow{T-\mu_1 I} 0$$

cada fator desce um degrau da bandeira;
n fatores levam $V = W_n$ a 0

A demonstração de Cayley–Hamilton como uma escada ($n = 4$). O fator $T - \mu_j I$ leva W_j para dentro de W_{j-1}, porque o último vetor da base de W_j é autovetor "módulo W_{j-1}". Depois de todos os fatores, não sobra nada.

Usado em: Corolário 8.59 (Potências e inversa como polinômios em A), Nota 8.58 (Uma "demonstração" falsa de Cayley–Hamilton), Teorema 8.62 (Polinômio mínimo) (dem.)

thm-ch

Nota 8.58 (Uma "demonstração" falsa de Cayley–Hamilton)

Requer: Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton)

A conta $p_A(A) = \det(A - A \cdot I) = \det 0 = 0$ não demonstra o Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton). Onde está o erro? $p_A(A)$ é uma *matriz*, obtida substituindo λ por A no polinômio $\det(A - \lambda I)$ já expandido; $\det(A - A)$ é um *número*. O lado esquerdo e o direito nem são do mesmo tipo.

nota-falsa-demonstracao-de-cayley-hamilton

Corolário 8.59 (Potências e inversa como polinômios em A)

Requer: Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton)

Se A é $n \times n$, toda potência A^m com $m \geq n$ é combinação linear de $I, A, \dots, A^{n-1}$. Se A é invertível, A^{-1} é um polinômio em A de grau $\leq n - 1$.

Demonstração

$p_A(A) = 0$ exprime A^n em termos de potências menores; multiplicando por A e repetindo, o mesmo vale para A^m. Se A é invertível, o termo constante de p_A é $\det A \neq 0$; escrevendo $p_A(A) = A\,q(A) + (\det A)I = 0$, vem $A^{-1} = -\frac{1}{\det A}\,q(A)$.

Usado em: Exemplo 8.60 (A inversa de uma matriz 3×3 por Cayley–Hamilton), Exemplo 8.61 (Potências da matriz de Fibonacci)

`cor-inversa-como-polinomio`

Exemplo 8.60 (A inversa de uma matriz 3×3 por Cayley–Hamilton)

Requer: Corolário 8.59 (Potências e inversa como polinômios em A)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$: $p_A = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2)$. Então $A^3 - 4A^2 + 5A = 2I$, isto é, $A\,(A^2 - 4A + 5I) = 2I$, e

$$A^{-1} = \tfrac{1}{2}(A^2 - 4A + 5I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

`ex-ch-a`

Exemplo 8.61 (Potências da matriz de Fibonacci)

Requer: Corolário 8.59 (Potências e inversa como polinômios em A), Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização)

$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (a matriz do Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização)): $A^2 = A + I$. Por indução, $A^m = F_m A + F_{m-1} I$; em particular $A^{10} = 55A + 34I = \left(\begin{smallmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{smallmatrix}\right)$, sem multiplicar matrizes.

`ex-ch-b`

Teorema 8.62 (Polinômio mínimo)

Requer: Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores), Definição 8.10 (Polinômio característico)

A demonstração exige: Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton)

Existe um único polinômio mônico m_T de grau mínimo com $m_T(T) = 0$. Ele divide todo polinômio p com $p(T) = 0$ — em particular divide p_T — e suas raízes são exatamente os autovalores de T.
Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio mínimo, porque $q(PAP^{-1}) = Pq(A)P^{-1}$.

Demonstração

Existência: pelo Teorema 8.57 (Teorema de Cayley–Hamilton), algum polinômio não nulo anula T; tome um de grau mínimo e divida pelo coeficiente líder. *Divide:* se $p(T) = 0$, divida: $p = qm_T + r$ com $\deg r < \deg m_T$. Então $r(T) = p(T) - q(T)m_T(T) = 0$, e pela minimalidade, $r = 0$. *Unicidade:* dois mônicos mínimos se dividem um ao outro e têm o mesmo grau, logo são iguais. *Raízes:* se λ é autovalor, $m_T(\lambda) = 0$ (Proposição 8.17 (Polinômios em T e autovalores)).

Reciprocamente, se $m_T(\lambda) = 0$, escreva $m_T = (t-\lambda)q$; como $\deg q < \deg m_T$, $q(T) \neq 0$, e existe v com $w = q(T)v \neq 0$. Então $(T-\lambda I)w = m_T(T)v = 0$: λ é autovalor, com autovetor w.

Usado em: Exemplo 8.63 (Polinômio mínimo da identidade, de idempotentes e de nilpotentes), Exemplo 8.64 (Mesmo polinômio característico, polinômios mínimos diferentes), Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples)

`thm-min`

Exemplo 8.63 (Polinômio mínimo da identidade, de idempotentes e de nilpotentes)

Requer: Teorema 8.62 (Polinômio mínimo)

$T = I$: $m = t-1$. T idempotente, $T \neq 0, I$: $m = t(t-1)$. T nilpotente com $T^k = 0 \neq T^{k-1}$: $m = t^k$.

`ex-min-a`

Exemplo 8.64 (Mesmo polinômio característico, polinômios mínimos diferentes)

Requer: Teorema 8.62 (Polinômio mínimo)

$A = \operatorname{diag}(2,2,3)$ e $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ têm o mesmo $p = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$. Os candidatos a m são os divisores mônicos com as duas raízes: $(t-2)(t-3)$ ou $(t-2)^2(t-3)$. Para A, $(A-2I)(A-3I) = \operatorname{diag}(0,0,1)\operatorname{diag}(-1,-1,0) = 0$: $m_A = (t-2)(t-3)$. Para B, $(B-2I)(B-3I)$ tem entrada $(1,2)$ igual a $1\cdot(-1) = -1 \neq 0$: $m_B = (t-2)^2(t-3)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$p = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$
$m = (t-2)(t-3)$
diagonalizável

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$p = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$
$m = (t-2)^2(t-3)$
não diagonalizável

O mesmo polinômio característico, polinômios mínimos diferentes. O 1 circulado em B é o que impede $(B-2I)(B-3I)$ de se anular, e é o que eleva o expoente de $t-2$ no polinômio mínimo. Também mostra que $p_A = p_B$ não implica que A e B sejam semelhantes (Definição 3.15 (Matrizes semelhantes)).

Veja também: Definição 3.15 (Matrizes semelhantes)

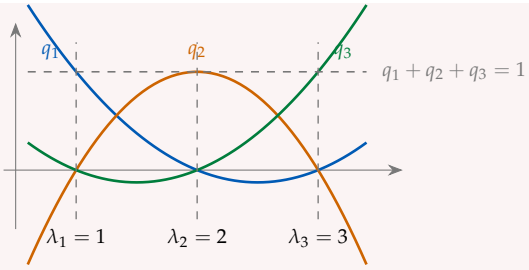
`ex-min-b`

Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples)

Requer: Teorema 8.62 (Polinômio mínimo), Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

A demonstração exige: Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações), Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)

T é diagonalizável se e somente se m_T tem todas as raízes reais e simples, isto é, $m_T = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_k)$ com λ_i reais e distintos. Basta, para isso, que T seja anulado por algum *polinômio com raízes reais simples.*



Os polinômios de Lagrange nos autovalores $1,2,3$. *Cada* q_i *vale* 1 *no seu autovalor e* 0 *nos outros, e os três somam* 1. *Aplicados a* T, *viram as projeções sobre os autoespaços:* $q_i(T)$ *é a identidade em* V_{λ_i} *e zero nos outros, e* $\sum_i q_i(T) = I$ *é a decomposição* $V = \bigoplus_i V_{\lambda_i}$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Numa base de autovetores, $\prod_i (T - \lambda_i I)$ anula cada vetor da base (o fator correspondente ao seu autovalor o anula, e os fatores comutam).

($\Leftarrow$) Considere os polinômios de Lagrange nos nós $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações)):

$$q_i(t) = \prod_{j \neq i} \frac{t - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}, \qquad q_i(\lambda_j) = \delta_{ij}.$$

O polinômio $\sum_i q_i$ tem grau $\leq k-1$ e vale 1 nos k nós, logo é a constante 1 (a diferença teria k raízes). Portanto $\sum_i q_i(T) = I$. Além disso, $(t - \lambda_i) q_i(t)$ é um múltiplo de $\prod_j (t - \lambda_j)$, que anula T; logo $(T - \lambda_i I) q_i(T) = 0$, isto é, $\operatorname{Im} q_i(T) \subset V_{\lambda_i}$. Então todo v se escreve

$$v = \sum_i q_i(T) v \in V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_k},$$

e V é a soma dos autoespaços: T é diagonalizável (Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)). A última frase do enunciado: se $p(T) = 0$ com raízes simples, m_T divide p e também tem raízes simples.

A demonstração amarra três coisas: os polinômios de Lagrange (Proposição 5.13 (Polinômios de Lagrange: a base dual das avaliações)), as somas diretas como famílias de projeções que somam a identidade (Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta), Proposição 8.45 (Somas diretas invariantes e projeções)), e a diagonalização (Teorema 8.23 (Critério de diagonalização)).

Usado em: Corolário 8.66 (Involuções e projeções são diagonalizáveis), Exercício 8.67 (Todo operador idempotente é diagonalizável?) (dem.), Exercício 8.68 (Se T^2 é diagonalizável, então T é diagonalizável?) (dem.)

Veja também: Proposição 2.33 (As projeções de uma soma direta), Proposição 8.45 (Somas diretas invariantes e projeções)

`thm-critm`

Corolário 8.66 (Involuções e projeções são diagonalizáveis)

Requer: Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples), Definição 8.38 (Subespaço invariante)

(a) $\Theta(A) = A^t$ *é diagonalizável:* $\Theta^2 = I$, *e* $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$ *tem raízes simples.* Compare com o Exemplo 8.19 (Os autoespaços da transposição).

(b) *Toda projeção* ($T^2 = T$) *e toda involução* ($T^2 = I$) *são diagonalizáveis.*

(c) *Se T é diagonalizável e S é invariante, $T|_S$ é diagonalizável*: $m_T(T|_S) = 0$, e m_T tem raízes simples.

Veja também: Exemplo 8.19 (Os autoespaços da transposição), Proposição 2.36 (Operadores idempotentes são projeções)

`cor-aplic`

Exercício 8.67 (Todo operador idempotente é diagonalizável?)

Requer: Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

A demonstração exige: Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples), Proposição 2.36 (Operadores idempotentes são projeções)

Verdadeiro ou falso? *Se $T^2 = T$, então T é diagonalizável.*

Resolução

Verdadeira. T é anulado por $t^2 - t = t(t-1)$, de raízes reais simples; aplique o Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples). (Ou, sem o teorema: $V = \mathrm{N}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ pela Proposição 2.36 (Operadores idempotentes são projeções), com $T = 0$ no primeiro e $T = I$ no segundo.)

`exerc-idempotente-e-diagonalizavel`

Exercício 8.68 (Se T^2 é diagonalizável, então T é diagonalizável?)

Requer: Definição 8.22 (Operador diagonalizável)

A demonstração exige: Teorema 8.65 (Diagonalizável se e somente se m_T tem raízes reais simples)

Verdadeiro ou falso? *Se T^2 é diagonalizável, então T é diagonalizável.*

Resolução

Falsa. $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: $T^2 = 0$ é diagonal, e T não é diagonalizável ($m_T = t^2$). Outro contraexemplo, sem autovalores reais: a rotação de 90°, com $T^2 = -I$.

`exerc-quadrado-diagonalizavel`

Capítulo 9

Teorema espectral e formas quadráticas

Operadores auto-adjuntos e o teorema espectral

Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica)

Requer: Definição 8.10 (Polinômio característico)

Se A é uma matriz real simétrica, todas as raízes de p_A são reais.

Demonstração

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ uma raiz e $z \in \mathbb{C}^n$, $z \neq 0$, com $Az = \lambda z$. Ponha $c = \bar{z}^t A z \in \mathbb{C}$. De um lado, $c = \lambda\, \bar{z}^t z = \lambda \sum_i |z_i|^2$, com $\sum_i |z_i|^2 > 0$. Do outro, c é real: seu conjugado é $\bar{c} = z^t A \bar{z}$ (porque A é real), e $z^t A \bar{z}$ é um número, igual ao seu transposto, $\bar{z}^t A^t z = \bar{z}^t A z = c$. Logo $\lambda = c / \sum |z_i|^2$ é real.

Usado em: Nota 9.4 (Como a auto-adjunção remove os dois obstáculos), Teorema 9.5 (Teorema espectral) (dem.)

Veja também: Nota 8.53 (Escalares complexos), Proposição 9.7 (Um autovetor real pelo máximo de $\langle Tv, v\rangle$)

`lem-reais`

Lema 9.2 (Auto-adjunto: autovetores de autovalores distintos são ortogonais)

Requer: Definição 6.38 (Operador auto-adjunto), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

Se T é auto-adjunto, autovetores de autovalores distintos são ortogonais.

Demonstração

Se $Tu = \lambda u$ e $Tv = \mu v$, então $\lambda\langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \mu\langle u, v\rangle$; com $\lambda \neq \mu$, $\langle u, v\rangle = 0$.

Usado em: Exemplo 9.8 (Diagonalização ortogonal com um autovalor duplo)

`lem-ortog`

Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^\perp$ também é)

Requer: Definição 6.38 (Operador auto-adjunto), Definição 8.38 (Subespaço invariante), Definição 6.21 (Complemento ortogonal)

Se T é auto-adjunto e S é invariante por T, então $S^\perp$ é invariante por T.

Demonstração

Sejam $v \in S^\perp$ e $s \in S$. Então $\langle Tv, s\rangle = \langle v, Ts\rangle = 0$, porque $Ts \in S$. Logo $Tv \in S^\perp$.

Usado em: Nota 9.4 (Como a auto-adjunção remove os dois obstáculos), Teorema 9.5 (Teorema espectral) (dem.)

`lem-perp`

Nota 9.4 (Como a auto-adjunção remove os dois obstáculos)

Requer: Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica), Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^\perp$ também é), Motivação 8.37 (Quando não dá para diagonalizar)

O Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^\perp$ também é) é onde a auto-adjunção trabalha, e sem ela é falso: para o cisalhamento $\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, o eixo x é invariante e o eixo y (seu ortogonal) não é — é exatamente por isso que o cisalhamento não se diagonaliza. O Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica) impede o outro obstáculo (Motivação 8.37 (Quando não dá para diagonalizar)), a rotação: uma rotação de $\mathbb{R}^2$ por $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$ não é simétrica.

Veja também: Exemplo 8.7 (Cisalhamento: um só autoespaço), Exemplo 8.6 (Rotação: nenhum autovalor real)

`nota-auto-adjuncao-remove-os-obstaculos`

Teorema 9.5 (Teorema espectral)

Requer: Definição 6.38 (Operador auto-adjunto), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

A demonstração exige: Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica), Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^\perp$ também é), Proposição 8.9 (λ é autovalor se e somente se $\det(T - \lambda I) = 0$), Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$)

Seja V de dimensão finita com produto interno e $T : V \to V$ auto-adjunto. Existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de T. Em matrizes: toda matriz real simétrica se escreve

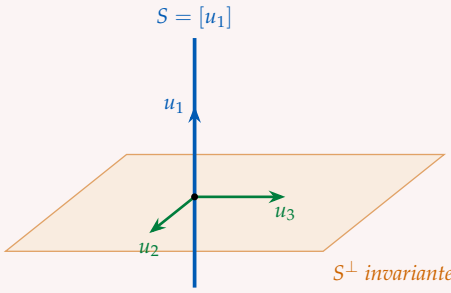
$$A = QDQ^t, \qquad Q \text{ ortogonal}, \quad D \text{ diagonal}.$$

Reciprocamente, se T tem uma base ortonormal de autovetores, T é auto-adjunto.
Compare com a triangularização (Teorema 8.54 (Triangularização)): lá passava-se ao quociente $V/[v_1]$ e a matriz ficava triangular; aqui passa-se ao complemento ortogonal, que é invariante, e o bloco acima da diagonal também se anula. O teorema é "triangularização + simetria = diagonalização".

Demonstração

Indução em $n = \dim V$; para $n = 1$, qualquer vetor unitário serve. Numa base ortonormal, $[T]$ é simétrica, e pelo Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica) p_T tem uma raiz real λ_1, que é autovalor. Seja u_1 um autovetor unitário. A reta $S = [u_1]$ é invariante, logo $S^\perp$ é invariante (Lema 9.3 (Auto-adjunto: se S é invariante, $S^\perp$ também é)), de dimensão $n-1$ (Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^\perp$)). A restrição $T|_{S^\perp}$ é auto-adjunta (com o produto interno restrito), e pela hipótese de indução $S^\perp$ tem uma base ortonormal $(u_2, \ldots, u_n)$ de autovetores. Então $(u_1, \ldots, u_n)$ é ortonormal (os u_j, $j \geq 2$, estão em $S^\perp$) e formada por autovetores.

Em matrizes: se Q tem por colunas essa base, Q é ortogonal, e $Q^{-1}AQ = D$ (Teorema 3.14 (Mudança de base de um operador: $[T]_{B'B'} = P^{-1}[T]_{BB}P$)), com $Q^{-1} = Q^t$. Recíproca: $(QDQ^t)^t = QD^tQ^t = QDQ^t$.



1. *um autovetor u_1;*
2. *o plano $u_1^\perp$ é invariante;*
3. *repita dentro do plano.*

A demonstração do teorema espectral em $\mathbb{R}^3$. Achado um autovetor, o plano perpendicular a ele é invariante, e T restrito a ele ainda é auto-adjunto; o problema cai uma dimensão. Os autovetores achados em cada passo são automaticamente ortogonais aos anteriores.

Usado em: Construção 9.30 (Redução de uma cônica ou quádrica: rotação e translação), Exemplo 9.8 (Diagonalização ortogonal com um autovalor duplo), Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor), Exercício 9.28 (Mesmos autovalores implicam mesma assinatura?) (dem.), Proposição 9.26 (Diagonalização simultânea de duas formas quadráticas) (dem.), Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados) (dem.)

Veja também: Teorema 8.54 (Triangularização), Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais)

`thm-espectral`

Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor)

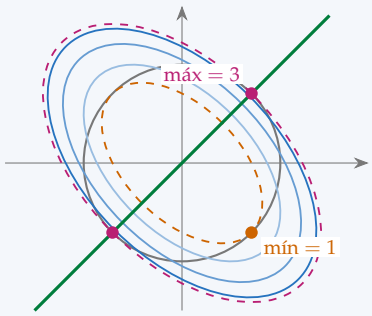
Requer: Teorema 9.5 (Teorema espectral)

A demonstração exige: Proposição 6.15 (Coordenadas numa base ortonormal)

Seja T auto-adjunto com autovalores $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Então

$$\lambda_1 = \max_{\|v\|=1} \langle Tv, v\rangle, \qquad \lambda_n = \min_{\|v\|=1} \langle Tv, v\rangle,$$

e os pontos de máximo (mínimo) são exatamente os autovetores unitários de λ_1 (λ_n).



$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $q(v) = \langle Av, v\rangle$

curvas de nível de q: elipses;
no círculo, q é máxima e mínima
nas direções dos autovetores

As curvas de nível $q = c$ de $q(v) = \langle Av, v\rangle$ são elipses com eixos nos autovetores. A maior que ainda toca o círculo unitário o toca na direção de V_3, onde $q = 3$; a menor que o toca, na direção de V_1. Nos pontos de contato, o círculo e a elipse são tangentes — e isso é a equação $Av = \lambda v$.

Demonstração

Numa base ortonormal de autovetores, $v = \sum_i x_i u_i$ com $\sum_i x_i^2 = 1$, e

$$\langle Tv, v\rangle = \sum_i \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_1 \sum_i x_i^2 = \lambda_1,$$

com igualdade se e somente se $\sum_i (\lambda_1 - \lambda_i)x_i^2 = 0$, isto é, $x_i = 0$ sempre que $\lambda_i < \lambda_1$: $v \in V_{\lambda_1}$. O mínimo é igual.

Usado em: Nota 9.43 (Onde a álgebra linear reaparece), Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações) (dem.)

Veja também: Proposição 9.7 (Um autovetor real pelo máximo de $\langle Tv, v\rangle$)

`prop-rayleigh`

Proposição 9.7 (Um autovetor real pelo máximo de $\langle Tv, v\rangle$)

Requer: Definição 6.38 (Operador auto-adjunto)

A demonstração exige: Teorema 6.22 ($V = S \oplus S^{\perp}$)

Seja T auto-adjunto e $q(v) = \langle Tv, v\rangle$. Então q atinge um máximo na esfera $\{\|v\| = 1\}$, e todo ponto de máximo v_1 é autovetor de T, de autovalor real $q(v_1)$.
Esta proposição pode substituir o Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica) na demonstração do Teorema 9.5 (Teorema espectral): ela não usa números complexos, e produz diretamente o autovetor de que o teorema precisa. Com ela, a Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor) vira parte da construção: o primeiro autovetor achado é o do maior autovalor.

Demonstração

A esfera $\{\|v\| = 1\}$ é fechada e limitada, e q é contínua; logo q atinge um máximo num ponto v_1. Seja $w \perp v_1$ e

$$f(t) = q\Big(\frac{v_1 + tw}{\|v_1 + tw\|}\Big) = \frac{\langle T(v_1 + tw), v_1 + tw\rangle}{1 + t^2\|w\|^2}.$$

f tem máximo em $t = 0$, logo $f'(0) = 0$. Derivando o numerador em $t = 0$ (o denominador tem derivada nula aí) e usando a auto-adjunção:

$$f'(0) = \langle Tw, v_1\rangle + \langle Tv_1, w\rangle = 2\langle Tv_1, w\rangle.$$

Portanto $Tv_1 \perp w$ para todo $w \perp v_1$, isto é, $Tv_1 \in (v_1^{\perp})^{\perp} = [v_1]$: v_1 é autovetor, de autovalor real $q(v_1)$.

Veja também: Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica), Teorema 9.5 (Teorema espectral), Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor)

`prop-autovetor-pelo-maximo`

Exemplo 9.8 (Diagonalização ortogonal com um autovalor duplo)

Requer: Teorema 9.5 (Teorema espectral), Lema 9.2 (Auto-adjunto: autovetores de autovalores distintos são ortogonais), Teorema 6.17 (Gram–Schmidt), Definição 8.26 (Multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica), Proposição 8.11 (O polinômio característico: grau, traço e determinante)

Diagonalizar ortogonalmente

$$S = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Autovalores. Observe que $S - 6I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ tem posto 1: $\dim V_6 = 2$. Pelo teorema espectral, $\mathrm{ma}(6) = \mathrm{mg}(6) = 2$, e o terceiro autovalor sai do traço: $15 - 6 - 6 = 3$.

(Confira: $p_S = (6-\lambda)^2(3-\lambda)$.)

Autoespaços. V_6: $-x-y+z=0$, o plano $x+y-z=0$. V_3: pelo Lema 9.2 (Auto-adjunto: autovetores de autovalores distintos são ortogonais), é ortogonal a V_6, logo é a reta normal ao plano: $V_3 = [(1,1,-1)]$. (Confira: $S(1,1,-1) = (3,3,-3)$.)

Base ortonormal. Em V_6 tome uma base qualquer, $(-1,1,0)$ e $(1,0,1)$, e aplique Gram–Schmidt *dentro de* V_6:

$$w_1 = (-1,1,0), \qquad w_2 = (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,1), w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (1,0,1) + \tfrac{1}{2}(-1,1,0) = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1\right).$$

Normalizando e juntando o de V_3:

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad S = QDQ^t.$$

As colunas são unitárias e duas a duas ortogonais (por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{18}}(1+1-2) = 0$), isto é, $Q^tQ = I$.

Dois pontos. *(i)* Dentro de um autoespaço de dimensão ≥ 2 a base de autovetores não vem ortogonal de graça — $(-1,1,0)$ e $(1,0,1)$ não são ortogonais —, e Gram–Schmidt resolve, porque qualquer combinação de autovetores de λ ainda é autovetor de λ. *(ii)* Entre autoespaços diferentes a ortogonalidade é automática (Lema 9.2 (Auto-adjunto: autovetores de autovalores distintos são ortogonais)), e é ela que permitiu achar V_3 sem resolver sistema. O truque do posto de $S-6I$ e do traço evita calcular um determinante 3×3.

ex-s

Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais)

Requer: Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais), Exemplo 6.3 (O produto escalar de $\mathbb{R}^n$), Definição 8.38 (Subespaço invariante)

A demonstração exige: Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$), Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$)

Seja A ortogonal ($A^tA = I$). Então $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$; $\det A = \pm 1$; todo autovalor real é ± 1; e se S é invariante por A, $S^\perp$ também é.

Demonstração

$\langle Au, Av\rangle = u^tA^tAv = u^tv$. $\det(A^t)\det A = 1$ e $\det A^t = \det A$. Se $Av = \lambda v$, $v \neq 0$, então $\|v\| = \|Av\| = |\lambda|\,\|v\|$. Se $A(S) \subset S$, então $A(S) = S$ (A é injetora), e para $v \in S^\perp$ e $s = As' \in S$: $\langle Av, s\rangle = \langle Av, As'\rangle = \langle v, s'\rangle = 0$.

Usado em: Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo)

Veja também: Exemplo 6.41 (Operadores ortogonais)

prop-ortog

Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo)

Requer: Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais)

A demonstração exige: Teorema 4.21 ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$), Teorema 4.13 ($\det A^t = \det A$), Teorema 4.11 ($\det A \neq 0$ equivale a A invertível), Exemplo 3.11 (Rotações e as fórmulas de adição)

Se A é 3×3 ortogonal com $\det A = 1$, existe $u \neq 0$ com $Au = u$, e A é uma rotação do plano $u^{\perp}$.

Demonstração

$\det(A-I) = \det(A - AA^t) = \det A\,\det(I-A^t) = \det\big((I-A)^t\big) = \det(I-A) = (-1)^3\det(A-I)$, logo $\det(A-I) = 0$: existe $u \neq 0$ com $Au = u$. O plano $u^{\perp}$ é invariante (Proposição 9.9 (Propriedades das matrizes ortogonais)), e numa base ortonormal (u_1, u_2) dele, completada por $u/\|u\|$, a matriz de A é $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ com R ortogonal 2×2 e $\det R = 1$. As matrizes ortogonais 2×2 de determinante 1 são as rotações: as colunas são $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e o vetor unitário perpendicular que dá det $= 1$, $(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$.

Usado em: Nota 9.11 (A forma geral de uma matriz ortogonal), Nota 9.43 (Onde a álgebra linear reaparece)

`thm-rotacao-de-r3-tem-eixo`

Nota 9.11 (A forma geral de uma matriz ortogonal)

Requer: Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo), Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante)

Toda matriz ortogonal $n\times n$ é, numa base ortonormal, diagonal por blocos com blocos ± 1 e blocos de rotação 2×2. A demonstração é a do Teorema 9.5 (Teorema espectral) com o Teorema 8.50 (Uma raiz complexa de p_A dá um plano invariante) (plano invariante de uma raiz complexa) no lugar do Lema 9.1 (As raízes de p_A são reais quando A é simétrica). Em $\mathbb{R}^3$ isso é o teorema de Euler (Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo)): todo movimento rígido que fixa a origem e preserva orientação é uma rotação em torno de um eixo. Em $\mathbb{R}^4$, dois blocos de rotação dão uma matriz ortogonal de determinante 1 sem vetor fixo.

Veja também: Teorema 9.5 (Teorema espectral), Exemplo 8.52 (Autovalores $2 \pm i$: uma rotação numa base torta)

`nota-forma-geral-das-matrizes-ortogonais`

Formas quadráticas e a lei de inércia de Sylvester

Definição 9.12 (Forma quadrática)

Requer: Proposição 7.4 (Formas simétricas e alternadas)

Uma **forma quadrática** em $\mathbb{R}^n$ é uma função $q(x) = x^tAx$ com A simétrica; em V qualquer, é $q(v) = \beta(v,v)$ com β bilinear simétrica.

Usado em: Definição 9.15 (Matrizes congruentes), Definição 9.29 (Cônicas e quádricas), Exemplo 9.14 (A matriz de uma forma quadrática), Proposição 9.13 (A forma quadrática determina a forma bilinear), Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados), Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

`def-fq`

Proposição 9.13 (A forma quadrática determina a forma bilinear)

Requer: Definição 9.12 (Forma quadrática)

A forma q determina β (e A): $\beta(u,v) = \frac{1}{2}\big(q(u+v) - q(u) - q(v)\big)$.

Demonstração

Expanda $q(u+v) = \beta(u+v, u+v) = q(u) + 2\beta(u,v) + q(v)$, usando a simetria.

`prop-polar`

Exemplo 9.14 (A matriz de uma forma quadrática)

Requer: Definição 9.12 (Forma quadrática)

$q(x,y,z) = x^2 + 4xy - 2yz + 3z^2$. Os quadrados vão na diagonal; cada termo cruzado se divide ao meio entre as duas posições simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

`ex-matq`

Definição 9.15 (Matrizes congruentes)

Requer: Definição 9.12 (Forma quadrática)

Mudando de coordenadas, $x = Py$ com P invertível,

$$q(Py) = y^t (P^t A P)\, y.$$

Duas simétricas A, B são **congruentes** se $B = P^t A P$ para alguma P invertível.
Compare:

operador: $A \mapsto P^{-1}AP$ (semelhança, Definição 3.15 (Matrizes semelhantes)) forma: $A \mapsto P^t AP$ (

As duas coincidem quando P é ortogonal. A semelhança preserva autovalores; a congruência não: com $P = 2I$, $P^tAP = 4A$ tem autovalores quatro vezes maiores. O que a congruência preserva é a assinatura (Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)).

Usado em: Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência), Proposição 9.26 (Diagonalização simultânea de duas formas quadráticas)

Veja também: Proposição 7.3 (Matriz de uma forma bilinear), Definição 3.15 (Matrizes semelhantes), Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester), Corolário 6.16 (Mudança entre bases ortonormais: matrizes ortogonais)

`def-congr`

Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados)

Requer: Definição 9.12 (Forma quadrática), Definição 8.1 (Autovalor, autovetor e autoespaço)

A demonstração exige: Teorema 9.5 (Teorema espectral)

Seja $q(x) = x^tAx$ em $\mathbb{R}^n$, com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A.

(a) *(Redução ortogonal.) Existe Q ortogonal com $q(Qy) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.*

(b) *(Redução de Sylvester.) Existe P invertível com $q(Pz) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+m}^2$, onde p e m são os números de autovalores positivos e negativos.*

Demonstração

(a) Pelo Teorema 9.5 (Teorema espectral), $A = QDQ^t$; então $q(Qy) = y^tQ^tAQy = y^tDy$. (b) Ordene os autovalores com os positivos primeiro, depois os negativos, depois os nulos, e ponha $y_i = z_i/\sqrt{|\lambda_i|}$ quando $\lambda_i \neq 0$ e $y_i = z_i$ quando $\lambda_i = 0$. Isto é, $P = Q\,\mathrm{diag}(c_i)$ com $c_i = 1/\sqrt{|\lambda_i|}$ ou 1.

Usado em: Exemplo 9.17 (Redução de $5x^2 - 4xy + 8y^2$), Nota 9.19 (As três formas reduzidas de $\mathbb{R}^2$), Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência) (dem.), Proposição 9.31 (O tipo da cônica $q = 1$ pelo determinante e pelo traço) (dem.)

Veja também: Construção 9.18 (Redução de Sylvester por completamento de quadrados)

`thm-reducao`

Exemplo 9.17 (Redução de $5x^2 - 4xy + 8y^2$)

Requer: Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados)

$q(x,y) = 5x^2 - 4xy + 8y^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{smallmatrix}\right)$: $\operatorname{tr} A = 13$, $\det A = 36$, autovalores 4 e 9, com autovetores $(2,1)$ e $(1,-2)$ (ortogonais, como deviam). Com $Q = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$,

$$q = 4y_1^2 + 9y_2^2 = z_1^2 + z_2^2 \qquad (z_1 = 2y_1,\ z_2 = 3y_2).$$

A curva $q = 36$ é a elipse $\frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1$, com semi-eixos 3 e 2 nas direções de $(2,1)$ e $(1,-2)$ — é a cônica do Exemplo 9.32 (Uma elipse: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$).

Usado em: Construção 9.18 (Redução de Sylvester por completamento de quadrados), Exemplo 9.32 (Uma elipse: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$)

Veja também: Exemplo 9.32 (Uma elipse: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$)

`ex-548`

Construção 9.18 (Redução de Sylvester por completamento de quadrados)

Requer: Exemplo 9.17 (Redução de $5x^2 - 4xy + 8y^2$)

Esta redução chega ao item (b) do Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados) sem usar autovalores. Para $q = 5x^2 - 4xy + 8y^2$, junte os termos em x e complete o quadrado:

$$q = 5\left(x^2 - \tfrac{4}{5}xy\right) + 8y^2 = 5\left(x - \tfrac{2}{5}y\right)^2 - \tfrac{4}{5}y^2 + 8y^2 = 5\left(x - \tfrac{2}{5}y\right)^2 + \tfrac{36}{5}y^2.$$

Com $w_1 = x - \frac{2}{5}y$, $w_2 = y$ (uma mudança de coordenadas invertível, triangular), $q = 5w_1^2 + \frac{36}{5}w_2^2$, e reescalando, $q = z_1^2 + z_2^2$. Em geral: se algum coeficiente de x_i^2 é não nulo, completa-se o quadrado nessa variável e repete-se com as restantes; se todos são nulos e há um termo x_ix_j, a substituição $x_i = u + v$, $x_j = u - v$ cria quadrados ($x_ix_j = u^2 - v^2$).

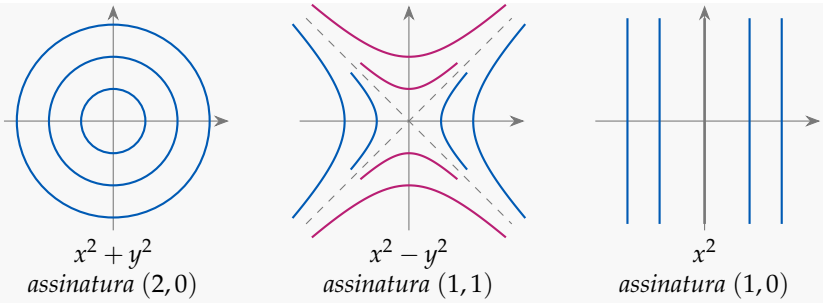
Note que os coeficientes obtidos (5 e $\frac{36}{5}$) *não* são os autovalores (4 e 9). O que coincide são os sinais. É a lei de inércia (Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)).

Veja também: Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

`con-completamento-de-quadrados`

Nota 9.19 (As três formas reduzidas de $\mathbb{R}^2$)

Requer: Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados)



x^2+y^2
assinatura $(2,0)$

x^2-y^2
assinatura $(1,1)$

x^2
assinatura $(1,0)$

As curvas de nível das três formas reduzidas de $\mathbb{R}^2$ não nulas (a menos de sinal). Azul: $q>0$; rosa: $q<0$; tracejado ou cinza: $q=0$. Toda forma em $\mathbb{R}^2$ é uma dessas três, ou a sua negativa, depois de uma mudança de coordenadas — e a lei de inércia (Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)) diz que ela não pode ser duas delas ao mesmo tempo.

Veja também: Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

`nota-tres-formas-reduzidas-do-plano`

Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

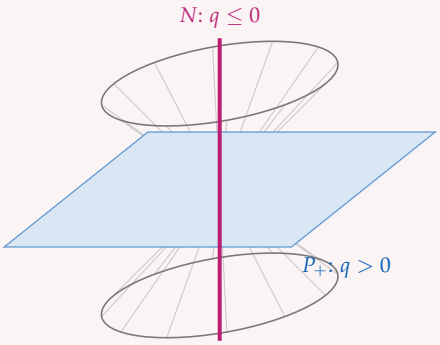
Requer: Definição 9.12 (Forma quadrática), Definição 2.75 (Dimensão)

A demonstração exige: Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)

Seja q uma forma quadrática em V, $\dim V = n$, e suponha que numa base $(e'_1,\dots,e'_n)$ se tenha

$$q\Big(\sum_i z_i e'_i\Big) = z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_{p+m}^2.$$

Então p é a maior dimensão de um subespaço $W\subset V$ em que q é positiva definida ($q(w)>0$ para $w\in W$, $w\neq 0$). Em particular, p não depende da base; nem m (aplique o mesmo a $-q$).



$q=x^2+y^2-z^2$
um plano onde $q>0$ não pode ter dimensão 3: cortaria o eixo N

A lei de inércia em $\mathbb{R}^3$ para $q=x^2+y^2-z^2$. O cone é $q=0$; fora dele, $q>0$ é a região "do lado" e $q<0$ a região "de dentro" do cone. Qualquer subespaço de dimensão 3 encontra o eixo z, onde $q\le 0$; logo 2 é a maior dimensão em que q é positiva definida, qualquer que seja a redução escolhida.

A demonstração é uma contagem de dimensões, a mesma do Exemplo 2.87 (Dois planos distintos pela origem em $\mathbb{R}^3$ se cortam numa reta). Na figura: há planos *inclinados* onde $q>0$ (qualquer plano que não entre no cone), mas nenhum subespaço de dimensão 3.

Demonstração

Em $P_+=[e'_1,\dots,e'_p]$, $q=z_1^2+\cdots+z_p^2>0$ fora da origem: existe um subespaço de dimensão p onde q é positiva definida. Seja agora W qualquer subespaço onde q é positiva definida, e

$N = [e'_{p+1}, \ldots, e'_n]$, onde $q = -z_{p+1}^2 - \cdots - z_{p+m}^2 \leq 0$. Se $\dim W > p$, então

$$\dim W + \dim N > p + (n - p) = n,$$

e pela fórmula da dimensão da soma (Teorema 2.85 (Dimensão da soma de dois subespaços)), $W \cap N \neq \{0\}$. Um $v \neq 0$ em $W \cap N$ teria $q(v) > 0$ e $q(v) \leq 0$. Logo $\dim W \leq p$.

Usado em: Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática), Nota 9.43 (Onde a álgebra linear reaparece)

Veja também: Exemplo 2.87 (Dois planos distintos pela origem em $\mathbb{R}^3$ se cortam numa reta)

`thm-sylvester`

Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática)

Requer: Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

A **assinatura** de q (ou de A) é o par (p, m).

Usado em: Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência), Exercício 9.27 (Mesma assinatura implica mesmos autovalores?), Exercício 9.28 (Mesmos autovalores implicam mesma assinatura?), Proposição 9.31 (O tipo da cônica $q = 1$ pelo determinante e pelo traço), Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações)

`def-assin`

Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência)

Requer: Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática), Definição 9.15 (Matrizes congruentes), Definição 3.23 (Posto de uma matriz)

A demonstração exige: Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados)

(a) *p e m são os números de autovalores positivos e negativos de A (contados com multiplicidade), e $p + m = \operatorname{posto} A$.*

(b) *Duas simétricas são congruentes se e somente se têm a mesma assinatura (e a mesma ordem).*

Demonstração

(a) A redução de Sylvester do Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados) tem p e m iguais a esses números, e pelo teorema qualquer outra tem os mesmos. O posto não muda por $A \mapsto P^t A P$ (multiplicar por invertíveis), e o posto de $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$ é $p + m$. (b) Se têm a mesma assinatura, as duas são congruentes à mesma matriz diagonal de ± 1 e 0; reciprocamente, $B = P^t A P$ significa que B é a matriz de q noutra base, e a assinatura não depende da base.

Usado em: Exemplo 9.24 (A assinatura de $2xy + 2yz + 2zx$), Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura), Exercício 9.27 (Mesma assinatura implica mesmos autovalores?) (dem.), Exercício 9.28 (Mesmos autovalores implicam mesma assinatura?) (dem.), Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações) (dem.)

`cor-assin`

Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações)

Requer: Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática), Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)

A demonstração exige: Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor), Corolário 9.22

(Assinatura, autovalores e congruência)

Para A simétrica, são equivalentes: (a) q é positiva definida; (b) todos os autovalores de A são positivos; (c) a assinatura é $(n, 0)$; (d) $A = B^t B$ com B invertível; (e) $\langle u, v\rangle_A = u^t Av$ é um produto interno.
Pelo item (e), *todo* produto interno em $\mathbb{R}^n$ é $u^t Av$ com A positiva definida, e Gram–Schmidt (Teorema 6.17 (Gram–Schmidt)) é, nessa linguagem, uma redução de Sylvester de A à identidade por uma P triangular.

Demonstração

(a) $\iff$ (b): Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor): $\min_{\|x\|=1} q(x) = \lambda_{\min}$. (b) $\iff$ (c): Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência)(a). (c)$\Rightarrow$(d): $P^t AP = I$ dá $A = (P^{-1})^t P^{-1}$. (d)$\Rightarrow$(a): $x^t B^t Bx = \|Bx\|^2 > 0$ se $x \neq 0$. (a) $\iff$ (e): é a definição de produto interno (Definição 6.2 (Produto interno, norma e ortogonalidade)), dada a bilinearidade e a simetria.

Usado em: Exemplo 9.25 (Diagonal e determinante positivos não bastam), Proposição 9.26 (Diagonalização simultânea de duas formas quadráticas)

Veja também: Exemplo 6.6 (Um produto interno em $\mathbb{R}^2$ que não é o usual), Teorema 6.17 (Gram–Schmidt)

`prop-posdef`

Exemplo 9.24 (A assinatura de $2xy + 2yz + 2zx$)

Requer: Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência)

$q = 2xy + 2yz + 2zx$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I$, com J a matriz de 1's. Os autovalores de J são $3, 0, 0$ (posto 1, traço 3), logo os de A são $2, -1, -1$: assinatura $(1, 2)$. Conferência por substituição: com $x = u + v$, $y = u - v$, $q = 2u^2 - 2v^2 + 4uz = 2(u + z)^2 - 2v^2 - 2z^2$: um sinal $+$ e dois $-$.

Usado em: Exemplo 9.39 (Um hiperboloide de duas folhas: $xy + yz + zx = 1$)

`ex-assin-a`

Exemplo 9.25 (Diagonal e determinante positivos não bastam)

Requer: Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações)

A armadilha. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$ tem diagonal positiva e $\det A = 5 \cdot (-1)^2 = 5 > 0$, mas autovalores $5, -1, -1$: *não* é positiva definida; $q(1, -1, 0) = 1 - 4 + 1 = -2$. Em 2×2 a armadilha não existe ($a > 0$ e $\det > 0$ bastam, porque $\det$ é o produto dos dois autovalores e $a > 0$ exclui os dois negativos); em 3×3 o determinante positivo é compatível com dois autovalores negativos.

`ex-diagonal-e-determinante-positivos-nao-bastam`

Proposição 9.26 (Diagonalização simultânea de duas formas quadráticas)

Requer: Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações), Definição 9.15 (Matrizes congruentes)

A demonstração exige: Teorema 9.5 (Teorema espectral)

Sejam A, B simétricas com B positiva definida. Existe P invertível com $P^t BP = I$ e $P^t AP$

diagonal; os elementos diagonais são as raízes de $\det(A - \lambda B) = 0$.
Em mecânica, com B a energia cinética e A a potencial de um sistema de massas e molas, as raízes de $\det(A - \lambda B) = 0$ são os quadrados das frequências dos modos normais. É um produto interno (B) e uma forma (A) diagonalizados juntos.

Demonstração

Pela Proposição 9.23 (Formas positivas definidas: cinco caracterizações), $P_1^t B P_1 = I$ para alguma P_1. A matriz $P_1^t A P_1$ é simétrica: $P_1^t A P_1 = Q D Q^t$ (Teorema 9.5 (Teorema espectral)). Com $P = P_1 Q$: $P^t B P = Q^t Q = I$ e $P^t A P = D$. E $\det(A - \lambda B) = \det\left((P^t)^{-1}(D - \lambda I)P^{-1}\right) = \det(D - \lambda I)/(\det P)^2$.

`prop-simult`

Exercício 9.27 (Mesma assinatura implica mesmos autovalores?)

Requer: Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática)

A demonstração exige: Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência), Definição 3.15 (Matrizes semelhantes)

Verdadeiro ou falso? *Duas matrizes simétricas reais com a mesma assinatura têm os mesmos autovalores.*

Resolução

Falsa. I e $2I$ (2×2) têm assinatura $(2, 0)$ e autovalores diferentes. São congruentes ($2I = P^t I P$ com $P = \sqrt{2}I$) e não são semelhantes.

`exerc-mesma-assinatura-mesmos-autovalores`

Exercício 9.28 (Mesmos autovalores implicam mesma assinatura?)

Requer: Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática)

A demonstração exige: Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência), Teorema 9.5 (Teorema espectral)

Verdadeiro ou falso? *Duas matrizes simétricas reais com os mesmos autovalores têm a mesma assinatura.*

Resolução

Verdadeira. A assinatura é o número de autovalores positivos e negativos (Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência)(a)). (Mais: pelo teorema espectral, as duas são ortogonalmente semelhantes à mesma diagonal, logo semelhantes *e* congruentes.)
Com o exercício Exercício 9.27 (Mesma assinatura implica mesmos autovalores?): a congruência vê só os sinais, a semelhança vê os valores.

`exerc-mesmos-autovalores-mesma-assinatura`

Cônicas e quádricas

Definição 9.29 (Cônicas e quádricas)

Requer: Definição 9.12 (Forma quadrática)

Uma **cônica** (em $\mathbb{R}^2$) ou **quádrica** (em $\mathbb{R}^3$) é o conjunto dos x com

$$x^t A x + b^t x + c = 0, \qquad A \text{ simétrica não nula, } b \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}.$$

Usado em: Construção 9.30 (Redução de uma cônica ou quádrica: rotação e translação), Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura)

`def-conicas-e-quadricas`

Construção 9.30 (Redução de uma cônica ou quádrica: rotação e translação)

Requer: Definição 9.29 (Cônicas e quádricas), Teorema 9.5 (Teorema espectral)

1. *Rotação.* Diagonalize $A = QDQ^t$ com Q ortogonal, $\det Q = 1$. Nas coordenadas $y = Q^t x$ (isto é, $x = Qy$), a equação fica

   $$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + b'^t y + c = 0, \qquad b' = Q^t b.$$

   Os termos cruzados desapareceram. Os novos eixos são as direções dos autovetores.

2. *Translação.* Para cada $\lambda_i \neq 0$, complete o quadrado: $\lambda_i y_i^2 + b'_i y_i = \lambda_i \big(y_i + \frac{b'_i}{2\lambda_i}\big)^2 - \frac{b_i'^2}{4\lambda_i}$. Os termos lineares restantes são os das variáveis com $\lambda_i = 0$.

3. *Leitura.* A forma reduzida diz o tipo; os semi-eixos são $\sqrt{k/\lambda_i}$ quando a equação reduzida é $\sum \lambda_i z_i^2 = k$ com $k/\lambda_i > 0$.

No passo 1 pode-se tomar $\det Q = 1$ (trocando o sinal de uma coluna), de modo que Q é uma rotação. A ordem importa: *primeiro girar, depois transladar*. Completar quadrados antes de girar não funciona quando há termo xy, e a rotação não mexe na constante nem cria termos cruzados. A translação muda o centro; a rotação muda os eixos. Os dois juntos são um movimento rígido: a curva não se deforma, e os semi-eixos lidos na forma reduzida são os verdadeiros.

Usado em: Exemplo 9.32 (Uma elipse: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$), Exemplo 9.33 (Uma parábola: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$), Exemplo 9.34 (Uma hipérbole: $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$), Exemplo 9.35 (Um par de retas paralelas: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$)

Veja também: Construção 9.18 (Redução de Sylvester por completamento de quadrados)

`con-alg`

Proposição 9.31 (O tipo da cônica $q = 1$ pelo determinante e pelo traço)

Requer: Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática)

A demonstração exige: Teorema 9.16 (Redução de uma forma quadrática a soma de quadrados), Corolário 8.55 (Traço e determinante: soma e produto das raízes de p_T)

Seja $q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. *A curva* $q = 1$ *é*

- *uma elipse se* $\det A > 0$ *e* $\operatorname{tr} A > 0$; *vazia se* $\det A > 0$ *e* $\operatorname{tr} A < 0$;
- *uma hipérbole se* $\det A < 0$;
- *um par de retas paralelas ou o vazio se* $\det A = 0$ *(segundo o sinal de* $\operatorname{tr} A$*).*

Os eixos são as direções dos autovetores, e os semi-eixos, $1/\sqrt{\lambda_i}$ *para* $\lambda_i > 0$.
Esta proposição é a lei de inércia em dimensão 2: det e tr bastam para conhecer a assinatura, sem calcular autovetores (a curva é elipse se e somente se $ac - b^2 > 0$ *e* $a > 0$;

sem a segunda condição, isso é falso).

Demonstração

Em coordenadas próprias, $q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$, com $\det A = \lambda_1\lambda_2$ e $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2$. $\det > 0$: mesmos sinais, e o traço diz qual. $\det < 0$: sinais opostos. $\det = 0$: um autovalor nulo, $\lambda y^2 = 1$.

Usado em: Exemplo 9.42 (Um elipsoide: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = 1$)

Veja também: Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

`prop-dettr`

Exemplo 9.32 (Uma elipse: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$)

Requer: Construção 9.30 (Redução de uma cônica ou quádrica: rotação e translação), Exemplo 9.17 (Redução de $5x^2 - 4xy + 8y^2$)

$5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$. Pelo Exemplo 9.17 (Redução de $5x^2 - 4xy + 8y^2$), autovalores $4, 9$ com autovetores $(2,1)$ e $(1,-2)$; nas coordenadas y_1, y_2 ao longo deles, $4y_1^2 + 9y_2^2 = 36$, isto é,

$$\frac{y_1^2}{9} + \frac{y_2^2}{4} = 1 :$$

elipse de centro na origem, semi-eixo 3 na direção de $(2,1)$ e 2 na de $(1,-2)$.

Com termos lineares. A cônica

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 16x - 8y - 16 = 0$$

tem a mesma parte quadrática e os termos lineares $b^t x$, com $b = (-16,-8)$. Primeiro gira-se, como acima: com $x = Qy$ (Q do Exemplo 9.17 (Redução de $5x^2 - 4xy + 8y^2$)), $b^t x = (Q^t b)^t y$ e $Q^t b = (-8\sqrt{5}, 0)$, porque $b = -8(2,1)$ está na direção do primeiro autovetor. A equação fica

$$4y_1^2 + 9y_2^2 - 8\sqrt{5}\, y_1 - 16 = 0.$$

Depois completa-se o quadrado, $4y_1^2 - 8\sqrt{5}\, y_1 = 4(y_1 - \sqrt{5})^2 - 20$:

$$4(y_1 - \sqrt{5})^2 + 9y_2^2 = 36,$$

e translada-se a origem, $z_1 = y_1 - \sqrt{5}$, $z_2 = y_2$: $\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{4} = 1$. É a mesma elipse, com centro em $y = (\sqrt{5}, 0)$, isto é, em $x = Qy = (2,1)$.

Usado em: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

Veja também: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

`ex-conicas-a`

Exemplo 9.33 (Uma parábola: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$)

Requer: Construção 9.30 (Redução de uma cônica ou quádrica: rotação e translação)

$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, autovalores 2 (direção $(1,1)$) e 0 (direção $(1,-1)$). Com $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$: $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = 2u^2$ e $-2x + 2y =$

$-2(x-y) = -2\sqrt{2}\,v$. A equação fica

$$2u^2 - 2\sqrt{2}\,v - 3 = 0, \qquad v = \frac{u^2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}:$$

parábola, com eixo na direção $(1,-1)$ e vértice em $u = 0$, $v = -\frac{3}{2\sqrt{2}}$, isto é, no ponto $(x,y) = (-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. O autovalor nulo não permite completar quadrado em v: é o que faz a parábola.

Usado em: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

Veja também: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

`ex-conicas-b`

Exemplo 9.34 (Uma hipérbole: $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$)

Requer: Construção 9.30 (Redução de uma cônica ou quádrica: rotação e translação)

$x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$. Sem termo cruzado: só transladar.

$$(x+1)^2 - 1 - (y-2)^2 + 4 - 4 = 0, \qquad (x+1)^2 - (y-2)^2 = 1:$$

hipérbole de centro $(-1,2)$, semi-eixo 1 na direção x, assíntotas de inclinação ± 1.

Usado em: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

Veja também: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

`ex-conicas-c`

Exemplo 9.35 (Um par de retas paralelas: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$)

Requer: Construção 9.30 (Redução de uma cônica ou quádrica: rotação e translação)

$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$. Com $s = x + 2y$: $s^2 - 6s + 8 = (s-2)(s-4) = 0$. *Par de retas paralelas* $x + 2y = 2$ e $x + 2y = 4$ (caso degenerado: $\det A = 0$).
Sabe-se antes de fazer contas que a cônica é degenerada: o polinômio se fatora, porque a parte linear é múltiplo de $x + 2y$, a direção do autovalor não nulo.

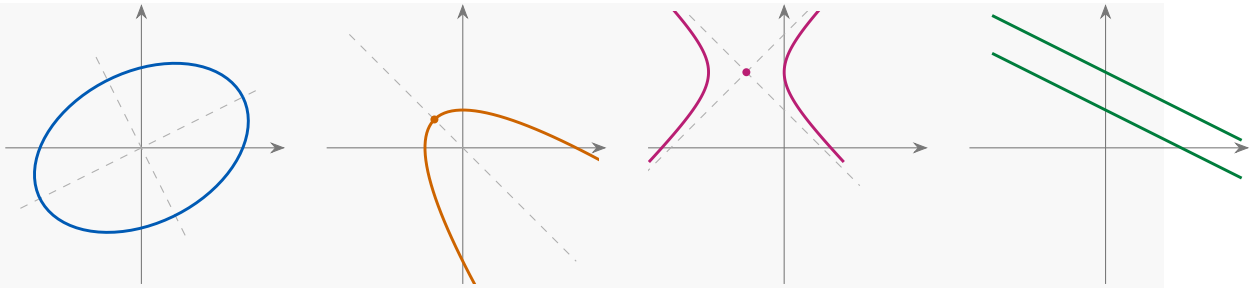
Usado em: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

Veja também: Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

`ex-conicas-d`

Nota 9.36 (Quatro cônicas lado a lado)

Requer: Exemplo 9.32 (Uma elipse: $5x^2 - 4xy + 8y^2 = 36$), Exemplo 9.33 (Uma parábola: $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$), Exemplo 9.34 (Uma hipérbole: $x^2 - y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$), Exemplo 9.35 (Um par de retas paralelas: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 8 = 0$)



(a) elipse (b) parábola (c) hipérbole (d) duas retas

Quatro cônicas, na mesma escala. Tracejados: os eixos próprios (a, b) e as assíntotas (c). Em (a) e (b) a rotação era necessária; em (c) só a translação; (d) é o caso degenerado de uma forma de posto 1 que se fatora.

`nota-quatro-conicas`

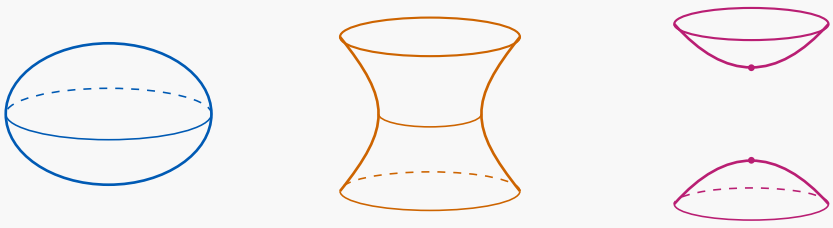
Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura)

Requer: Definição 9.29 (Cônicas e quádricas), Corolário 9.22 (Assinatura, autovalores e congruência)

Para $x^t Ax = 1$ em $\mathbb{R}^3$ com A invertível, a forma reduzida é $\pm z_1^2 \pm z_2^2 \pm z_3^2 = 1$ após reescalar, e o tipo depende só da assinatura:

assinatura	forma reduzida	superfície
$(3,0)$	$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$	elipsoide
$(2,1)$	$z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = 1$	hiperboloide de uma folha
$(1,2)$	$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 1$	hiperboloide de duas folhas
$(0,3)$	$-z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 1$	vazio

Com um autovalor nulo aparecem os cilindros (elíptico, hiperbólico); com o nível 0 no lugar de 1, o cone.



$(3,0)$ elipsoide $(2,1)$ uma folha $(1,2)$ duas folhas

As três quádricas não degeneradas e não vazias. O número de sinais $-$ decide a topologia: nenhum dá uma superfície fechada; um dá uma superfície conexa com um "buraco" (um círculo na cintura); dois dão duas peças. Pode-se mostrar que $\{x^t Ax = 1\}$ é, a menos de deformação, $S^{p-1} \times \mathbb{R}^m$.

Usado em: Exemplo 9.38 (Um cilindro elíptico: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 1$), Exemplo 9.39 (Um hiperboloide de duas folhas: $xy + yz + zx = 1$), Exemplo 9.40 (Um hiperboloide de uma folha: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$), Exemplo 9.41 (Um cone: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$), Exemplo 9.42 (Um elipsoide: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz = 1$)

Veja também: Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

`nota-quadricas-pela-assinatura`

Exemplo 9.38 (Um cilindro elíptico: $x^2+y^2+z^2+2xy=1$)

Requer: Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura)

$x^2+y^2+z^2+2xy=1$: $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$, autovalores $2,0,1$. Forma reduzida $2u^2+w^2=1$ (sem v): *cilindro elíptico* com eixo na direção $(1,-1,0)$, do autovalor 0.

`ex-quadricas-a`

Exemplo 9.39 (Um hiperboloide de duas folhas: $xy+yz+zx=1$)

Requer: Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura), Exemplo 9.24 (A assinatura de $2xy+2yz+2zx$)

$xy+yz+zx=1$: $A=\frac{1}{2}(J-I)$, autovalores $1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ (Exemplo 9.24 (A assinatura de $2xy+2yz+2zx$)), assinatura $(1,2)$: *hiperboloide de duas folhas*, com eixo na direção $(1,1,1)$.
Uma equação sem nenhum quadrado dá um hiperboloide de duas folhas; não há como adivinhar sem a assinatura.

`ex-quadricas-b`

Exemplo 9.40 (Um hiperboloide de uma folha: $x^2+y^2-z^2=1$)

Requer: Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura)

$x^2+y^2-z^2=1$: assinatura $(2,1)$, *hiperboloide de uma folha*.

`ex-quadricas-c`

Exemplo 9.41 (Um cone: $x^2+y^2-z^2=0$)

Requer: Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura)

$x^2+y^2-z^2=0$: nível 0, *cone* (a figura do Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)).

Veja também: Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester)

`ex-quadricas-d`

Exemplo 9.42 (Um elipsoide: $x^2+2y^2+3z^2-2xz=1$)

Requer: Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura), Proposição 9.31 (O tipo da cônica $q=1$ pelo determinante e pelo traço)

$x^2+2y^2+3z^2-2xz=1$: $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{smallmatrix}\right)$. O autovalor 2 vem de y; o bloco $\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\-1&3\end{smallmatrix}\right)$ tem $\operatorname{tr}=4$ e $\det=2$, logo autovalores $2\pm\sqrt{2}>0$. Assinatura $(3,0)$: *elipsoide*, com semi-eixos $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$.
O atalho: quando a matriz se parte em blocos, os autovalores se calculam bloco a bloco (Proposição 8.45 (Somas diretas invariantes e projeções)), e para decidir a assinatura de um bloco 2×2 bastam det e tr (Proposição 9.31 (O tipo da cônica $q=1$ pelo determinante e pelo traço)).

Veja também: Proposição 8.45 (Somas diretas invariantes e projeções)

`ex-quadricas-e`

Nota 9.43 (Onde a álgebra linear reaparece)

Requer: Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo), Teorema 9.20 (Lei de inércia de Sylvester), Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor)

Seis lugares em que o que se fez aqui é a primeira linha de um teorema de outra área.

1. *Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo* (Teorema 9.10 (Toda rotação de $\mathbb{R}^3$ tem um eixo)). O cálculo $\det(A - I) = (-1)^3 \det(A - I)$ é toda a demonstração, e ele falha em dimensão par: em $\mathbb{R}^4$ há rotações sem vetor fixo. É o teorema de Euler da mecânica do corpo rígido.

2. *Não se penteia uma bola sem redemoinho.* Um campo linear $x \mapsto Ax$ é tangente à esfera se e somente se A é antissimétrica; em dimensão ímpar, $\det A = \det A^t = (-1)^n \det A$ força $\det A = 0$, e o campo se anula num ponto da esfera. É o caso linear do teorema da bola cabeluda.

3. *A exponencial de uma matriz.* $e^{PDP^{-1}} = Pe^D P^{-1}$ resolve $x' = Ax$ como a diagonalização resolveu Fibonacci (Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização)); $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$ sai da triangularização (Corolário 8.55 (Traço e determinante: soma e produto das raízes de p_T)); e e^A é uma rotação quando A é antissimétrica. É a porta de entrada dos grupos de Lie.

4. *Pontos críticos na esfera.* A função $\langle Ax, x\rangle$ na esfera tem $2n$ pontos críticos, $\pm u_i$ (os autovetores, Proposição 9.6 (Quociente de Rayleigh: o maior e o menor autovalor)); perto de cada um ela é uma forma quadrática cuja assinatura conta os autovalores menores (Definição 9.21 (Assinatura de uma forma quadrática)). A soma alternada $\sum(-1)^{\text{índice}}$ dá 2 ou 0 conforme a paridade, *qualquer que seja* A: é a característica de Euler da esfera, e é o começo da teoria de Morse.

5. *A assinatura decide a forma da superfície* (Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura)). $\{x^t Ax = 1\}$ é $S^{p-1} \times \mathbb{R}^m$: a lei de inércia é o que garante que "hiperboloide de uma folha" é um conceito bem definido.

6. *Um grafo é um complexo* (Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas)). Com d a diferença ao longo das arestas, $\dim N(d)$ conta as componentes conexas e $\dim H^1$ os ciclos independentes; a característica de Euler (Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo)) dá $V - A =$ componentes $-$ ciclos. E o laplaciano $L = d^\dagger d$ é simétrico, positivo semidefinido, com núcleo contando componentes: contar buracos virou diagonalizar uma matriz simétrica.

Veja também: Exemplo 8.34 (Fibonacci por diagonalização), Corolário 8.55 (Traço e determinante: soma e produto das raízes de p_T), Definição 7.23 (Complexos e sequências exatas), Teorema 7.32 (Característica de Euler de um complexo), Nota 9.37 (Quádricas pela assinatura)

`nota-onde-a-algebra-linear-reaparece`