Lista V

MAT0134 – INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2° Semestre de 2026
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Decida se as seguintes transformações são lineares:

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = |x|$;

b) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = x^2$;

c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = (x + 1,\ y)$;

d) $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, definida por $(Tp)(t) = p(t + 1)$;

e) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $T(A) = \mathrm{Tr}(A)$;

f) $T : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definida por $T(A) = \det(A)$, com $n \geq 2$. O que acontece se $n = 1$?

g) $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, definida por $T(A) = A^t$.

Exercício 2. Prove que T é linear e determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$ e $\ker(T)$ nos seguintes casos:

a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y) = y + 2x$;

b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y, z) = x + 2y + z$;

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$;

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(a, b)(t) = at^2 + bt + (a + b)$;

e) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $(Tp)(t) = p'(t)$;

f) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $(Tp)(t) = p'(t) + p''(t)$;

g) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $(Tp)(t) = t^2 p''(t)$;

h) $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = \left(\int_{-1}^{0} p(t)\, dt, \int_{0}^{1} p(t)\, dt \right)$;

i) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X$;

j) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X + X$;

k) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Em cada caso, confira o Teorema do Núcleo e da Imagem (veja o quadro abaixo).

Teorema do Núcleo e da Imagem. Sejam U um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita, V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $T : U \to V$ uma transformação linear. Então

$$\dim(U) = \dim \ker(T) + \dim \mathrm{Im}(T).$$

Transformações definidas numa base. Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de U e $v_1, \ldots, v_n \in V$ são vetores quaisquer, então existe uma *única* transformação linear $T : U \to V$ tal que $T(u_i) = v_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Para encontrar $T(u)$ para um $u \in U$ qualquer, escreva $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$; então

$$T(u) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Exercício 3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(1,0,0) = (2,3,1)$, $T(1,1,0) = (5,2,7)$ e $T(1,1,1) = (-2,0,7)$.

a) Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, encontre $T(x,y,z)$;

b) Decida se T é injetora, sobrejetora ou bijetora.

Exercício 4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear tal que $T(0,1,0) = (1,1,2)$, $T(0,0,1) = (0,0,2)$ e $T(1,0,0) = (1,2,0)$.

a) Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, encontre $T(x,y,z)$;

b) Determine uma base para cada um dos seguintes $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

$$\ker(T), \quad \mathrm{Im}(T), \quad \ker(T) \cap \mathrm{Im}(T), \quad \ker(T) + \mathrm{Im}(T).$$

Exercício 5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(1,1) = (3,0,3)$ e $T(1,-1) = (-1,2,1)$.

a) Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, encontre $T(x,y)$;

b) Mostre que T é injetora e encontre uma equação para o plano $\mathrm{Im}(T)$;

c) Decida se existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (5,-1,4)$ e se existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (1,1,1)$. Em caso afirmativo, encontre v.

Exercício 6. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que

$$T_k(1,1,0) = (1,0,1), \qquad T_k(0,1,1) = (0,1,1), \qquad T_k(1,0,1) = (1,1,k).$$

a) Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, encontre $T_k(x,y,z)$;

b) Determine os valores de k para os quais T_k é um isomorfismo;

c) Para o valor de k em que T_k não é um isomorfismo, determine uma base de $\ker(T_k)$ e de $\mathrm{Im}(T_k)$;

d) Descreva geometricamente o operador T_0 e encontre T_0^{-1}.

Exercício 7. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$T(1+t) = 1, \qquad T(t+t^2) = 1+2t, \qquad T(1+t^2) = 2t.$$

a) Mostre que $\{1+t,\ t+t^2,\ 1+t^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$;

b) Dado $p(t) = a + bt + ct^2$ qualquer, encontre $(Tp)(t)$. Você reconhece este operador?

c) Determine uma base e a dimensão de $\ker(T)$ e de $\mathrm{Im}(T)$;

d) Encontre todos os $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tais que $(Tp)(t) = 3 - 4t$.

Exercício 8. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ o operador linear tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Dada $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ qualquer, encontre $T(X)$ e escreva $T(X)$ em termos de X e X^t;

b) Mostre que $\ker(T)$ é o subespaço das matrizes antissimétricas e $\mathrm{Im}(T)$ é o subespaço das matrizes simétricas. Determine suas dimensões e verifique o Teorema do Núcleo e da Imagem;

c) Mostre que $T \circ T = 2\,T$.

Exercício 9. Decida, em cada caso, se existe um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo as condições dadas. Em caso afirmativo, decida se ele é único e, se não for, encontre dois operadores distintos com essas propriedades.

a) $T(1,1,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,1) = (0,1,0)$ e $T(1,2,1) = (1,1,1)$;

b) $T(1,1,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,1) = (0,1,0)$ e $T(1,2,1) = (1,1,0)$.

Exercício 10. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathrm{Im}(T) = [(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)], \quad \ker(T) = [(1,1,1,1,1),(1,1,1,1,0)].$$

Exercício 11. Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathrm{Im}(T) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = 0,\, z + w = 0\}, \quad \ker(T) = [(1,0,1,1),(0,-1,-1,-1)].$$

Existe um operador linear $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Im}(S) = \ker(S)$? E um operador linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com essa propriedade?

Exercício 12. Sejam $S, T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ os operadores lineares $T(x,y,z) = (x + y,\, y + z,\, 0)$ e $S(x,y,z) = (z,\, x,\, y)$.

a) Encontre $S \circ T$ e $T \circ S$ e verifique que $S \circ T \neq T \circ S$;

b) Determine $\ker(S \circ T)$, $\ker(T \circ S)$, $\mathrm{Im}(S \circ T)$ e $\mathrm{Im}(T \circ S)$;

c) Sejam agora U, V, W $\mathbb{R}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$, $S : V \to W$ transformações lineares quaisquer. Prove que $S \circ T$ é linear, que $\ker(T) \subseteq \ker(S \circ T)$ e que $\mathrm{Im}(S \circ T) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.

Exercício 13. Mostre que T é um isomorfismo linear e encontre T^{-1} nos seguintes casos:

a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $T(x) = 2x$;

b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(x,y) = (x + 2y, 2x - y)$;

c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (x + 2y, y + z, x - z)$;

d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (x, x - y, 2x + y - z)$;

e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida por $T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, -z)$;

f) $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, definida por $T(at + b) = (b - a) - at$.

Exercício 14. Seja $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p(0) = 0\}$.

a) Mostre que $\mathcal{S}$ é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$;

b) Mostre que $T : \mathcal{S} \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, definido por $(Tp)(t) = p'(t)$, é um isomorfismo linear;

c) Encontre T^{-1}.

Exercício 15. Verifique se os $\mathbb{R}$-espaços vetoriais U e V são isomorfos nos seguintes casos. Quando forem, encontre um isomorfismo explícito $T : U \to V$.

a) $U = \mathbb{R}^2, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}$;

b) $U = M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \quad V = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}$;

c) $U = \mathbb{R}^3, \quad V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A^t = A\}$;

d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, a \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 16. Sejam U, V dois $\mathbb{R}$-espaços vetoriais e $T : U \to V$ uma transformação linear. Prove que:

a) $T(0_U) = 0_V$;

b) $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ são respectivamente $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de U e V;

c) Se $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ é *l.i.* em V então $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é *l.i.* em U;

d) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é *l.d.* em U então $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ é *l.d.* em V;

e) Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ gera U então $\{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ gera $\mathrm{Im}(T)$;

f) T é injetora se, e somente se, $\ker(T) = \{0\}$;

g) T é injetora se, e somente se, leva vetores *l.i.* de U em vetores *l.i.* de V;

h) T é sobrejetora se, e somente se, transforma um conjunto gerador de U num conjunto gerador de V;

i) T é bijetora se, e somente se, leva uma base de U numa base de V;

j) Se T é inversível então $T^{-1} : V \to U$ é uma transformação linear;

k) Se $U = \mathbb{R}$, então existe $v \in V$ tal que $T(\alpha) = \alpha v$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;

l) Se $U = \mathbb{R}^n$ e $V = \mathbb{R}$, então existem $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que $T(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ para todo $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Exercício 17. *(Consequências do Teorema do Núcleo e da Imagem.)* Sejam U, V dois $\mathbb{R}$-espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \to V$ uma transformação linear. Prove que:

a) Se $\dim(U) = \dim(V)$, então T é injetora se, e somente se, T é sobrejetora, e portanto é um isomorfismo;

b) Se T é sobrejetora então $\dim(V) \leq \dim(U)$;

c) Se T é injetora então $\dim(U) \leq \dim(V)$;

d) Se T é um isomorfismo então $\dim(U) = \dim(V)$;

e) Reciprocamente, se $\dim(U) = \dim(V)$, então U e V são isomorfos;

f) Se $\dim(U) > \dim(V)$, então existe $u \in U$ não nulo tal que $T(u) = 0$;

g) Se a dimensão de U é ímpar, então $\dim \mathrm{Im}(T) \neq \dim \ker(T)$;

h) Se $\dim(V) = 1$ então $T = 0$ ou T é sobrejetora;

i) Se $\dim(V) = 1$ e $T \neq 0$ então $\dim \ker(T) = \dim(U) - 1$.

Exercício 18. *(Dimensão infinita.)* Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o $\mathbb{R}$-espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes reais e considere os operadores lineares $D, J : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definidos por

$$(Dp)(t) = p'(t), \qquad (Jp)(t) = \int_0^t p(s)\, ds.$$

a) Mostre que D é sobrejetor, mas não é injetor;

b) Mostre que J é injetor, mas não é sobrejetor;

c) Mostre que $D \circ J = I$, mas $J \circ D \neq I$;

d) Conclua que a hipótese de dimensão finita no Exercício 17 a) é essencial.

Exercício 19. Sejam U, V dois $\mathbb{R}$-espaços vetoriais e seja $\mathcal{L}(U; V)$ o conjunto de todas as transformações lineares de U em V. Quando $U = V$, usaremos a notação $\mathcal{L}(V)$ em vez de $\mathcal{L}(V; V)$.

a) Verifique que $\mathcal{L}(U; V)$ se torna um $\mathbb{R}$-espaço vetorial quando se definem a soma $T + S$ e o produto $\alpha \cdot T$ por um número $\alpha \in \mathbb{R}$ da maneira natural:

$$(T + S)(u) = Tu + Su, \qquad (\alpha \cdot T)(u) = \alpha\, Tu;$$

b) Seja $I : V \to V$ o *operador identidade*, $I(v) = v$. Prove que, se $\dim(V) = 1$, todo operador linear em V é da forma $\alpha \cdot I$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, e conclua que, neste caso, $\mathcal{L}(V) = [I]$.