Lista IV

MAT0134 – INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR
2° Semestre de 2026
IME-USP

Prof. Kostiantyn Iusenko

Exercício 1. Verifique se o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base para o $\mathbb{R}$-espaço vetorial V nos seguintes casos:

a) $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}, \quad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad V = M_2(\mathbb{R})$;

c) $\mathcal{B} = \{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}, \quad V = \mathbb{R}^4$.

Exercício 2. Encontre uma base e determine a dimensão do $\mathbb{R}$-subespaço vetorial W do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V nos seguintes casos:

a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x - y = 0, e\ x + 2y + t = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^4$;

b) $W = \left\{ X \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = X \right\}, \quad V = M_2(\mathbb{R})$;

c) $W = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p''(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}\}, \quad V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 3. Encontre uma base e determine a dimensão dos $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais $U, W, U+W$, $U \cap W$ do $\mathbb{R}$-espaço vetorial V nos seguintes casos:

a) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}, \quad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}, \quad V = \mathbb{R}^3$;

b) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, \mathrm{Tr}(A) = 0\}, \quad W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, A = -A^t\}, \quad V = M_2(\mathbb{R})$;

c) $U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p'(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p(0) = p(1) = 0\}, V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 4. Determine as coordenadas de $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ com relação as seguintes bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$:

a) base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

b) $\mathcal{B} = \{(0,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$;

c) $\mathcal{B} = \{(1,2,1), (0,3,2), (1,1,4)\}$.

Exercício 5. Determine as coordenadas do polinômio $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$ com relação as seguintes bases $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

a) base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

b) $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3\}$;

c) $\mathcal{B} = \{4+t, 2, 2-t^2, t+t^3\}$.

Exercício 6. Determine as coordenadas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ com relação as seguintes bases $\mathcal{B}$ de $M_2(\mathbb{R})$:

a) base canônica de $M_2(\mathbb{R})$;

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercício 7. Mostre que o conjunto solução de um sistema linear homogêneo com n incógnitas é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Exercício 8. Encontre uma base e determine a dimensão para o conjunto solução dos seguintes sistemas lineares homogêneos:

a) $\begin{cases} x - 3y + 2z - w &= 0, \\ x - 2y + 4z + 3w &= 0, \\ x - 5y - 2z - 9w &= 0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5y - 3z + 2w &= 0, \\ x + 6y + 2z - 3w &= 0, \\ x + 3y - 13z + 12w &= 0. \end{cases}$

Exercício 9. Seja $S = \left\{ X \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) \ : \ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X = 4X \right\}$.

a) Mostre que S é um $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$;

b) Determine uma base e a dimensão de S;

c) Complete a base encontrada no item anterior à uma base de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Exercício 10. Sejam $S = \{(0, 2, -1, 0, 1), (0, 0, 3, -1, 2), (0, 4, -5, 1, 0)\}$ e $v = (0, m, -m, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$.

a) Ache uma base para $[S]$;

b) Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais $v \in [S]$;

c) Se $v \notin [S]$, vale $[S \cup \{v\}] = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x = 0\}$?

Exercício 11. Seja $S = \{x^2-1, x+1, x^2+x\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e considere o polinômio $p(x) = mx^2+nx+r$.

a) Ache uma base para $[S]$;

b) Determine os valores de m, n e r para os quais $p \in [S]$;

c) Se $p \notin [S]$, vale $[S \cup \{p\}] = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Exercício 12. Sejam $S_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \ : \ f(1) = 0\}$, $S_2 = [x^3 - x, x^2 - 1, x - 1]$ e considere o polinômio $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$.

a) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$;

b) Verifique se $p \in S_1 \cap S_2$. Em caso afirmativo, determine as coordenadas de p em relação a base encontrada no item anterior.

Exercício 13. Sejam $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \,:\, x - y + z = 0 \right\}$ e

$$S_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

a) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$;

b) Seja $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Verifique se $M \in S_1 \cap S_2$. Em caso afirmativo, determine as coordenadas de M em relação a base encontrada no item anterior.

Exercício 14. Seja $\mathcal{B} = \{(1,0,0,2,0), (0,0,-1,0,1), (2,1,0,-3,-5)\}$.

a) Mostre que $\mathcal{B}$ é *l.i.*;

b) Ache uma base de $\mathbb{R}^5$ que contém $\mathcal{B}$.

Exercício 15. Determine os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais o polinômio $p(t) = 4t^2 + 2t + 4$ pertença ao $\mathbb{R}$-subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $p_1(t) = b(t+1)$, $p_2(t) = 1 - bt^2$ e $p_3(t) = 1 + bt + bt^2$.

Exercício 16. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e U, W dois $\mathbb{R}$-subespaços vetoriais de V. Se $\mathcal{B}$ é uma base de U, $\mathcal{C}$ é uma base de W e $V = U \oplus W$, prove que $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ é uma base de V.

Exercício 17. Seja X um conjunto qualquer. Para cada $a \in X$, seja $f_a : X \to \mathbb{R}$ a função tal que $f_a(a) = 1$ e $f_a(x) = 0$ se $x \neq a$.

a) Prove que o conjunto $Y \subset \mathcal{F}(X;\mathbb{R})$ formado por estas funções é *l.i.*;

b) Se X é infinito, prove que Y não gera $\mathcal{F}(X;\mathbb{R})$.

Exercício 18. Mostre que os monômios $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}, t^n$ formam uma base para $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Exercício 19. Verifique se os seguintes subconjuntos de $C^\infty(\mathbb{R})$ são *l.i.*:

a) $\{1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{3x}, \mathrm{e}^{4x}\}$;

b) $\{\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, x^3, x^2, x\}$.

Notação para matrizes de mudança de base. Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão n e $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{C}$ duas bases de V. Denotamos por

$$M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \Big([u_1]_{\mathcal{C}} \;\; [u_2]_{\mathcal{C}} \;\; \cdots \;\; [u_n]_{\mathcal{C}} \Big)$$

a matriz $n \times n$ cuja j-ésima coluna é o vetor de coordenadas de u_j em relação à base $\mathcal{C}$. Esta matriz satisfaz

$$[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\, [v]_{\mathcal{B}} \qquad \text{para todo } v \in V.$$

A seta indica o sentido em que a matriz age sobre as *coordenadas*: ela recebe coordenadas em relação a $\mathcal{B}$ (à direita) e devolve coordenadas em relação a $\mathcal{C}$ (à esquerda). Observe que o índice $\mathcal{B}$ da matriz fica sempre ao lado de $[v]_{\mathcal{B}}$, o que facilita conferir as contas. Em particular, para quaisquer bases $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ de V,

$$M_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = M_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \big(M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\big)^{-1}.$$

Exemplo. Em $\mathbb{R}^2$, sejam $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica e $\mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}$. Como as coordenadas de um vetor em relação à base canônica são as suas próprias entradas,

$$M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \big(M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\big)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observação. Na literatura aparecem várias outras notações para esta matriz (por exemplo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, "matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$"), nem sempre com a mesma convenção. Ao consultar um livro, confira sempre qual é a relação entre as coordenadas.

Exercício 20. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2\}$ as bases de $\mathbb{R}^2$ dadas por $u_1 = (1,2)$, $u_2 = (2,3)$, $v_1 = (1,3)$ e $v_2 = (1,4)$.

a) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$;

b) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$;

c) Verifique que $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ são inversas uma da outra.

d) Seja $w = (0,1)$. Encontre $[w]_{\mathcal{B}}$ e use a matriz $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ para calcular $[w]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[w]_{\mathcal{B}}$;

e) Seja $w = (2,5)$. Encontre $[w]_{\mathcal{C}}$ e use a matriz $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ para calcular $[w]_{\mathcal{B}}$ a partir de $[w]_{\mathcal{C}}$.

Exercício 21. Sejam $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ as bases de $\mathbb{R}^3$ dadas por $u_1 = (-3,0,-3)$, $u_2 = (-3,2,-1)$, $u_3 = (1,6,-1)$, $v_1 = (-6,-6,0)$, $v_2 = (-2,-6,4)$ e $v_3 = (-2,-3,7)$.

a) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$;

b) Seja $w = (-5,8,-5)$. Encontre $[w]_{\mathcal{B}}$ e use a matriz $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ para calcular $[w]_{\mathcal{C}}$;

c) Confira seu resultado na parte b) calculando $[w]_{\mathcal{C}}$ diretamente.

Exercício 22. Sejam $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C} = \{1,\ 1+t,\ (1+t)^2\}$.

a) Mostre que $\mathcal{C}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$;

b) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$;

c) Encontre a matriz mudança de base $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$;

d) Seja $p(t) = 3 - 2t + t^2$. Use a matriz $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ para calcular $[p]_{\mathcal{C}}$, isto é, para escrever p como combinação linear de 1, $1+t$ e $(1+t)^2$. Confira o resultado expandindo.

Exercício 23. Sejam $\mathcal{B} = \{1+t,\ t+t^2,\ 1+t^2\}$ e $\mathcal{C} = \{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\}$ bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e seja $\mathcal{E} = \{1, t, t^2\}$ a base canônica.

a) Encontre as matrizes $M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$;

b) Use a igualdade $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\right)^{-1} M_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ para encontrar $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$;

c) Encontre $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ diretamente, escrevendo cada vetor de $\mathcal{B}$ como combinação linear dos vetores de $\mathcal{C}$, e compare com o item anterior;

d) Seja $p(t) = 2 + 4t + 6t^2$. Encontre $[p]_{\mathcal{B}}$ e use $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ para calcular $[p]_{\mathcal{C}}$.

Exercício 24. Sejam $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ (onde E_{ij} é a matriz com 1 na posição (i,j) e 0 nas demais) e

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Mostre que $\mathcal{C}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$;

b) Encontre as matrizes mudança de base $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ e $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$;

c) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix}$ (a matriz do Exercício 6). Use $M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ para calcular $[A]_{\mathcal{C}}$;

d) Mais geralmente, para $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, determine $[X]_{\mathcal{C}}$. O que as coordenadas de X em relação a $\mathcal{C}$ dizem sobre o traço de X e sobre X ser simétrica ou antissimétrica?

Exercício 25. Sejam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V de dimensão finita.

a) Prove que $M_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{C}} = M_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$;

b) Conclua que $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ é invertível e que $\left(M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\right)^{-1} = M_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$;

c) Mostre que $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ é a matriz identidade se, e somente se, $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ (como bases ordenadas).