MAT2219 – Cálculo Diferencial e Integral III
Exercícios – 07/05/2018

Prof. Claudio Gorodski

II. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:

(a) $\oint_\gamma x^2y\,dx + xy^3\,dy$, onde γ é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$, orientado positivamente. Resp. $-1/12$.

(b) $\oint_\gamma (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, onde γ consiste no arco da parábola $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ concatenado com o segmento de reta de $(1,1)$ a $(0,0)$, orientada positivamente. Resp. $1/6$.

(c) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, onde γ é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário. Resp. $1/3$.

(d) $\oint_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, orientada no sentido anti-horário. Resp. 0.

(e) $\oint_\gamma xy\,dx + 2x^2\,dy$, γ consiste no segmento de reta unindo $(-2,0)$ a $(2,0)$ e da semi-circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, orientada positivamente. Resp. 0.

(f) $\oint_\gamma 2xy\,dx + x^2\,dy$, γ é a cardióide $\rho = 1 + \cos\theta$ orientada positivamente. Resp. 0.

(g) $\oint_\gamma (xy + e^{x^2})\,dx + (x^2 - \ln(1+y))\,dy$, γ consiste no segmento de reta de $(0,0)$ a $(\pi,0)$ e do arco da curva $y = \sin x$, orientada positivamente. Resp. π.

(h) $\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (y^2 - x^2y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ e γ consiste do arco de circunferência $x^2 + y^2 = 4$ de $(2,0)$ a $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, e dos segmentos de reta de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(2,0)$. Resp. $\pi + \frac{16}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$.

III. Calcule

(a) $\int_\gamma x^2(5ydx + 7xdy) + e^y dy$, sendo γ a elipse $16x^2 + 25y^2 = 100$, percorrida de $(0,-2)$ a $(0,2)$ com $x \geq 0$. Resp. $e^2 - \frac{1}{e^2} + \frac{125}{2}\pi$.

(b) $\int_\gamma (2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3})\,dx + (x^2e^y + \sin y)\,dy$, sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 - 2x = 0$, percor rida de $(0,0)$ a $(2,0)$ com $y \geq 0$. Resp. $4 - \frac{3\pi}{4}$.

(c) $\int_\gamma \vec{v}dr$, sendo γ a fronteira do r etângulo $[1,2]\times[-1,1]$ e $\vec{v}(x,y) = 2\arctan(\frac{y}{x})\,\vec{i} + (\ln(x^2+y^2) + 2x)\,\vec{j}$, percorrida no sentido anti-horário. Resp. 4.

IV. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas curvas $y^2 = 2(x+2)$ e $x = a$, com $a > 0$, orientada no sentido horário Resp. -2π.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$, onde γ é a curva $y = x^2 + 1$, $-1 \le x \le 2$, percorrida do ponto $(-1, 2)$ a $(2, 5)$. Resp. $\frac{1}{2}\ln\frac{29}{5}$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$, onde γ é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, orientada no sentido horário. Resp. 2π.

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{x^2y\,dx - x^3\,dy}{(x^2+y^2)^2}$, onde γ é a fronteira da região $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\}$, orientada no sentido horário. Resp. π.

V. Verifique que a integral $\displaystyle\int_\gamma 2x\sin y\,dx + (x^2\cos y - 3y^2)\,dy$, onde γ é uma curva ligando $(-1, 0)$ a $(5, 1)$, é independente do caminho e calcule o seu valor. Resp. $25\sin 1 - 1$.

VI. Seja γ uma curva plana simples, fechada e lisa por partes, percorrida uma vez no sentido horário. Dê todos os valores possíveis para:

$$(a)\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}. \qquad (b)\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{4x^2+9y^2}.$$

Resp. (a) 0 ou -2π; (b) 0 ou] $-\frac{\pi}{3}$.

VII. Determine todos os valores possíveis da integral

$$\int_{(1,0)}^{(2,2)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

sobre um caminho que não passe pela origem.

VIII. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$ onde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+\frac{y^2}{9}} + y, \frac{x}{x^2+\frac{y^2}{9}} + 3x\right)$ sendo:

(a) γ é a curva $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, percorrida uma vez no sentido horário. Resp. -8π.

(b) γ é a curva $(x-1)^2 + y^2 = 4$, percorrida uma vez no s entido horário. Resp. -14π.

IX. Calcule

(a) $\displaystyle\int_\gamma (-2xy + x^2)dx + \sqrt{8-y^7}\,dy$, onde γ é o gráfico de $y = \cos x$, no intervalo $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, percorrido no sentido de x crescente. Resp. $\frac{\pi^3}{12}$.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{2xy^2}{x^2+1}\right)dx + (2y\ln(x^2+1))dy$, onde γ é o arco da elipse $4x^2 + y^2 = 1$ do ponto $(0, 1)$ ao ponto $(\frac{1}{2}, 0)$ percorrido no sentido anti-horário. Resp. 0.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + xy\right)dy$ onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geq x-1$ e $y^2 \leq x+1$, orientada n o sentido anti horário. Resp. $2\pi + \frac{9}{4}$.

(d) $\displaystyle\int_\gamma (2xy + \sin(y))dx + x\cos(y)dy + x^2dz$ onde γ é a intersecção das superfícies $3x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $y = x$, no 1^o octante e orientada de forma que a sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido horário. Resp. $\frac{1}{12}\left(6\sin\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{-y}{x^2+2y^2}dx + \frac{x}{x^2+2y^2}dy$ onde γ é a circunferência de centro $(0,1)$ e raio 3, percorrida no sentido horário. O campo $\vec{F}$ é conservativo? Justifique sua resposta. Resp. -2π.

X. Seja o campo $\vec{F}(x,y) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j}}{x^2+y^2}$ e γ a curva dada por $\gamma(t) = (e^t, \sin t)$ para $0 \leq t \leq \pi$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}d\vec{r}$. Resp. π.

XI. Calcule as integrais

(a) $\displaystyle\int_\gamma 7x^6y\,dx + x^7\,dy$ sendo $\gamma(t) = (t, e^{t^2-1})$, onde $t \in [0,1]$. Resp. 1.

(b) $\displaystyle\int_\gamma [\ln(x+y^2) - y]\,dx + [2y\ln(x+y^2) - x]\,dy$ sendo γ a curva $(x-2)^2 + y^2 = 1$ com $y \geq 0$ orientada no sentido horário. Resp. $3\ln 3 - 2$.

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva dada por $x(t) = \cos^3 t$ e $y(t) = \sin^3 t$ com $y \geq 0$ ligando os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$, nessa ordem. Resp. $-\frac{\pi}{2}$.

XII. Mostre que as integrais abaixo independem do caminho e calcule-as.

(a) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(a,b)} 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$. Resp. $a^2b - \frac{b^3}{3} - \frac{2}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} \sin y\,dx + x\cos y\,dy$. Resp. $a\sin b$.

XIII. Para cada campo $\vec{F}$ encontre uma curva fechada simples α, tal que $\displaystyle\int_\alpha \vec{F}d\vec{r} \neq 0$. Podemos concluir que os campos não são conservativos?

(a) $\vec{F} = (y^2 + xy, 3y^2)$. (b) $\vec{F} = (e^{xy}, e^{-xy})$.

XIV. Calcule

(a) $\displaystyle\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$. Resp. -2.

(b) $\displaystyle\int_\gamma \sin(yz)\,dx + xz\cos(yz)\,dy + xy\cos(yz)\,dz$, sendo γ a hélice $x(t) = \cos t$, $y(t) =$ sen$t$, $z(t) = t$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Resp. $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)$.

XV. Sejam um ponto A pertencente à esfera $x^2+y^2+z^2=1$ e um ponto B pertencente à esfera $x^2+y^2+z^2=4$. Calcule $\displaystyle\int_A^B \frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{x^2+y^2+z^2}$. Resp. $\ln 2$.

32. Se $\vec{n}(x,y)$ é vetor unitário normal ao traço da curva γ em (x,y), calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ sendo:
(a) $\vec{F}(x,y)=x^{10}\vec{i}+(3x-10x^9y)\vec{j}$ e γ a parte da circunferência $x^2+y^2=1$ contida no primeiro quadrante, $\vec{n}$ normal exterior à circunferência. Resp. $-\frac{1}{11}$.
(b) $\vec{F}(x,y)=x^3y^3\vec{i}-\dfrac{3x^2y^4+2}{4}\vec{j}$ e $\gamma(t)=(t^3,\sin(4\arctan t^2))$, $t\in[0,1]$, $n\cdot\vec{j}\le 0$. Resp. $\frac{1}{2}$.