5.a aula: 13mar (resumo)

5.1 Um vetor $\vec{v}$ é paralelo a uma reta r se $A + \vec{v} \in r$ para algum $A \in r$. Em particular, o vetor nulo é paralelo a qualquer reta. Dois vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ são ditos *linearmente dependentes* (ou, abreviadamente, L.D.) se são paralelos a uma mesma reta r. Em particular, $\vec{u}$, $\vec{v}$ são L.D. se pelo menos um deles fôr o vetor nulo. A reformulação algébrica da dependência linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ é que exista uma solução $(x, y) \neq (0, 0)$, (dita solução não-trivial) da equação vetorial

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = \vec{0}.$$

5.2 Um vetor $\vec{v}$ é paralelo a um plano π se $A + \vec{v} \in \pi$ para algum $A \in \pi$. Em particular, o vetor nulo é paralelo a qualquer plano. Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são ditos *linearmente dependentes* (ou, abreviadamente, L.D.) se são paralelos a um mesmo plano π. Em particular, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ são L.D. se pelo menos um deles fôr o vetor nulo. A reformulação algébrica da dependência linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ é que exista uma solução $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, (dita solução não-trivial) da equação vetorial

$$x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w} = \vec{0}.$$

5.3 Usamos o ponto de vista algébrico para estender a definição de L.D. ao caso de um número finito qualquer de vetores. Então um vetor $\vec{u}$ é L.D. se e somente se a equação

$$x \cdot u = \vec{0}$$

possui solução $x \neq 0$, ou seja, se e somente se $\vec{u} = \vec{0}$. Em geral, $u_1, \ldots, u_n$ são L.D. se e somente se existe uma solução $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ de

$$x_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}.$$

Um conjunto de vetores que não é L.D. é dito *linearmente independente* (L.I.).

5.4 É claro que se um conjunto de vetores é L.D. e adicionamos elementos, então o conjunto resultante também é L.D. Se um conjunto de vetores é L.I. e retiramos elementos, o novo conjunto permanece L.I.

5.5 Proposição. Quatro vetores (ou mais) em $\mathbb{V}$ são sempre L.D.

Dem. Sejam $\vec{v}_i$, $i = 1, \ldots, 4$ quatro vetores. Fixemos uma origem O. Sejam $A_i = 0 + \vec{v}_i$ para $i = 1, \ldots, 4$. Por (5.4), podemos assumir que os três primeiros vetores são L.I. Então os pontos 0, A_1, A_2, A_3 não são coplanares. Agora consideremos A_4: a reta por A_4, paralela à reta OA_3, encontra o plano OA_1A_2 no ponto A_4'. Por sua vez, a reta por A_4', no plano OA_1A_2, paralela a OA_2 (resp. OA_1) encontra OA_1 (resp. OA_2) no ponto B_1 (resp. B_2). O plano por A_4, paralelo ao plano OA_1A_2, encontra a reta OA_3 no ponto B_3. Assim

construímos o paralelepípedo que tem O, B_1, B_2, B_3, A'_4, A_4 como alguns de seus vértices (faça uma figura!). Portanto

$$\begin{aligned}\vec{OA}_4 &= \vec{OB}_1 + \vec{B}_1A'_4 + \vec{A}'_4A_4 \\ &= \vec{OB}_1 + \vec{OB}_2 + \vec{OB}_3 \\ &= \alpha\vec{OA}_1 + \beta\vec{OA}_2 + \gamma\vec{OA}_3\end{aligned}$$

para alguns α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, e

$$\alpha\vec{OA}_1 + \beta\vec{OA}_2 + \gamma\vec{OA}_3 + (-1)\vec{OA}_4 = \vec{0}$$

onde $(\alpha, \beta, \gamma, -1) \neq (0, 0, 0, 0)$.

5.6 Por (5.5), o número máximo de vetores L.I. em $\mathbb{V}$ é três. Por esta razão, dizemos que a *dimensão* de $\mathbb{V}$ é três, e chamamos a qualquer conjunto de três vetores L.I. de *base*.

Ex. 5.1 Verifique que $\vec{u}$, $\vec{v}$ são L.I. se e somente se $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ são L.I.

Ex. 5.2 Demonstrar o **Teorema de Thales.** Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ são vetores não-nulos paralelos a uma reta, e $\vec{a}$, $\vec{b}$ são vetores não-nulos paralelos à outra, e $\vec{u} - \vec{a}$ é paralelo à $\vec{v} - \vec{b}$, então $\frac{\vec{v}}{\vec{u}} = \frac{\vec{b}}{\vec{a}}$.

Ex. 5.3 Demonstrar o **Teorema de Pappus.** Se $\vec{r}$, $\vec{t}$, $\vec{v}$ são vetores não-nulos paralelos a uma reta, e $\vec{s}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$ são vetores não-nulos paralelos à outra, e $\vec{u} - \vec{v}$ é paralelo à $\vec{s} - \vec{r}$, e $\vec{t} - \vec{s}$ é paralelo à $\vec{v} - \vec{w}$, então $\vec{u} - \vec{t}$ é paralelo à $\vec{w} - \vec{r}$.