MAT0334 - MAT5721: Introdução à Análise Funcional
Prova 2 - Maio 14 de 2019

Prof. Wilson Cuellar
Monitora: Rafaela Gesing

Definição. Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dizemos que T é *limitado por baixo* se existe $\gamma > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \geq \gamma\|x\|, \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

I)(2,0) Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ limitado por baixo.

1. Seja $(x_n)_n$ uma sequência em X tal que $(T(x_n))_n$ é de Cauchy em Y. Mostre que $(x_n)_n$ é de Cauchy em X.

   Resolução: Seja $\epsilon > 0$ qualquer. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T(x_n) - T(x_m)\| < \gamma\epsilon$, para todo $n, m \geq n_0$. Assim, se $n, m \geq n_0$

   $$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\gamma}\|T(x_n - x_m)\| = \frac{1}{\gamma}\|T(x_n) - T(x_m)\| < \frac{1}{\gamma}\gamma\epsilon = \epsilon$$

   Portanto, $(x_n)_n$ é de Cauchy.

2. Mostre que TX é fechado.

   Resolução: Seja $y \in \overline{TX}$. Então existe $(x_n)_n$ sequência em X tal que $T(x_n) \to y$ quando $n \to \infty$. Como a sequência $(T(x_n))_n$ é convergente, é de Cauchy; segue do item 1. que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em X (que é Banach) e portanto, existe $z \in X$ tal que $x_n \to z$. Como T é contínua, $T(x_n) \to T(z)$. Da unicidade do limite segue que $T(z) = y$, portanto, $y \in TX$.

3. Mostre que T é um isomorfismo de X sobre sua imagem TX.

   Resolução: Note que T é injetora, pois se $x \in X$ é tal que $T(x) = 0$, então $0 = \|T(x)\| \geq \gamma\|x\|$, de onde segue que $x = 0$. Portanto, $T : X \to TX$ é bijeção contínua entre espaços de Banach (TX é Banach pois pelo item anterior é um subespaço fechado de um Banach). Do Teorema da Aplicação Aberta segue que $T^{-1} : TX \to X$ é contínua, isto é, T é um isomorfismo de X sobre sua imagem TX.

II)(3,0) Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, \ell_1)$ sobrejetivo.

1. Mostre que existe uma sequência *limitada* $(x_n)_n$ de elementos em X tal que $T(x_n) = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (**Sugestão**: Use o teorema da aplicação aberta.)

   Resolução: Pelo Teorema da Aplicação Aberta, T é aberta, então existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_{\ell_1} \subset T(B_X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $e_n \in B_{\ell_1}$, e assim $\delta e_n \in \delta B_{\ell_1}$; portanto, existe $y_n \in B_X$ tal que $T(x_n) = \delta e_n$. Colocando $x_n = \frac{1}{\delta}y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ temos que $T(x_n) = \frac{1}{\delta}T(y_n) = \frac{1}{\delta}\delta e_n = e_n$. Além disso,

   $$\|x_n\| = \left\|\frac{1}{\delta}y_n\right\| = \frac{1}{\delta}\|y_n\| \leq \frac{1}{\delta},$$

   isto é, a sequência $(x_n)_n$ é limitada.

2. Mostre que existe um operador $S \in \mathcal{L}(\ell_1, X)$ tal que $S(e_n) = x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Resolução: Seja $a = (a_n)_n \in \ell_1$, observemos que $\sum_n a_n x_n$ é absolutamente convergente (e portanto convergente) em X. De fato, para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} \|a_n x_n\| = \sum_{n=1}^{N} |a_n| \|x_n\| \leq C \sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq C\|a\|_1, \tag{1}$$

   onde $\sup_n \|x_n\| \leq C$. Tomando limite quando $N \to \infty$ obtevemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x_n\|$ é convergente. Para cada $a = (a_n)_n \in \ell_1$, definamos $S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. S está bem definida pela observação anterior. Sejam $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n$ em ℓ_1 e $\lambda \in \mathbb{K}$

$$S(a + \lambda b) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + \lambda b_n) x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n = S(a) + \lambda S(b).$$

   Portanto S é linear. Segue da equação (1) que $\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| \leq C\|a\|_1$, para todo $N \in \mathbb{N}$ e $a = (a_n)_n \in \ell_1$. Tomando limite quando $N \to \infty$ obtevemos $\|S(a)\| \leq C\|a\|_1$, para todo $a \in \ell_1$. Concluímos que S é contínua e por definição $S(e_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Prove que $T(S(y)) = y$, para todo $y \in \ell_1$.

   Resolução: Sabemos que $(e_n)_n$ é base de Schauder de ℓ_1. Seja $y = (a_n)_n \in \ell_1$, logo $y = \sum_n^{\infty} a_n e_n$ e para cada $N \in \mathbb{N}$

$$T \circ S \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right) = T \left(\sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n.$$

   Segue da continuidade de T e S, ao tomar limite quando $N \to \infty$, que $T \circ S(y) = y$.

4. Mostre que X contém um subespaço fechado isomorfo a ℓ_1. Conclua que X não é reflexivo. (**Sugestão**: Mostre que S é limitado por baixo e use problema I)

   Resolução: Primeiramente vamos mostrar que S é limitado por baixo. Com efeito, dado $y \in \ell_1$, pelo item anterior,

$$\|y\| = \|T(S(y))\| \leq \|T\| \|S(y)\|$$

   Assim,

$$\|S(y)\| \geq \frac{1}{\|T\|} \|y\|, \ \forall y \in \ell_1$$

   Do problema I segue que $S : \ell_1 \to S(\ell_1)$ é isomorfismo, isto é, X contém um subespaço fechado isomorfo a ℓ_1 (a saber, $S(\ell_1)$). Como ℓ_1 não é um espaço reflexivo, concluímos que X não pode ser reflexivo.

III)(3,0)

1. Sejam X um espaço normado e Y um subespaço de X. Dado $T \in \mathcal{L}(Y, \ell_\infty)$ demonstre que existe uma extensão $S \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ de T tal que $\|T\| = \|S\|$.

   Resolução: Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \pi_n : \ell_\infty &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (z_j)_j &\longmapsto z_n \end{aligned}$$

   Note que π é linear e $|\pi_n((z_j)_j)| = |z_n| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} |z_j| = \|(z_j)_j\|_\infty$, assim, π_n é contínua e $\|\pi_n\| \leq 1$. Além disso, $\|\pi_n\| \geq |\pi_n(e_n)| = 1$; portanto, $\|\pi_n\| = 1$.

Temos então que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n \circ T : Y \to \mathbb{K}$ é linear e contínua. Do Teorema de Hahn-Banach, existe $\varphi_n \in X^*$ tal que $\varphi_n(y) = (\pi_n \circ T)(y)$, $\forall y \in Y$ e $\|\varphi_n\| = \|\pi_n \circ T\|$. Note que

$$\|(\pi_n \circ T)(x)\| \leq \|\pi_n\|\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|,$$

e portanto, $\|\varphi_n\| = \|\pi_n \circ T\| \leq \|T\|$.

Considere

$$\begin{aligned} S : X &\longrightarrow \ell_\infty \\ x &\longmapsto (\varphi_n(x))_n \end{aligned}$$

- S está bem definida: Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x \in X$, temos
$$|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|,$$
portanto, $(\varphi_n(x))_n \in \ell_\infty$.
- S é linear: Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x, y \in X$,
$$S(\alpha x + y) = (\varphi_n(\alpha x + y))_n = \alpha(\varphi_n(x))_n + (\varphi_n(y))_n = \alpha S(x) + S(y)$$
- S é contínua: Se $x \in X$, temos
$$\|S(x)\| = \|(\varphi_n(x))_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \leq \|T\|\|x\|,$$
de onde segue a continuidade de S.
- $\|S\| = \|T\|$: Com efeito, temos
$$\|S\| = \sup\{\|Sx\| : x \in B_X\} \geq \sup\{\|Sy\| : y \in B_Y\} = \sup\{\|Ty\| : y \in B_Y\} = \|T\|$$
Por outro lado, se $x \in B_X$, então
$$\|Sx\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| \leq \|T\| \ \Rightarrow \|S\| \leq \|T\|$$

2. Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, X)$ limitado por baixo. Prove que existe $S \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ tal que $S(T(x)) = x$ para todo $x \in \ell_\infty$. (**Sugestão**: Use os exercícios I e III-1.)

   Resolução: Considere $Y = T(\ell_\infty)$. Da questão I), temos que $T : \ell_\infty \to Y$ é isomorfismo e portanto, $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y, \ell_\infty)$. De III-1. segue que existe $S \in \mathcal{L}(X, \ell_\infty)$ tal que $S(y) = T^{-1}(y)$, para todo $y \in Y$. Assim, se $x \in \ell_\infty$, então $T(x) \in Y$ e temos $S(T(x)) = T^{-1}(T(x)) = x$.

IV)(2,0) Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Mostre que T é limitado por baixo *se e somente se* T^* é sobrejetor.

Resolução: ($\Rightarrow$) Seja $g \in X^*$. Como T é limitado por baixo, da questão I), segue que $T^{-1} : TX \to X$ é isomorfismo, portanto, $g \circ T^{-1} : TX \to \mathbb{K}$ é linear e contínua. Do Teorema de Hahn-Banach, existe $h \in Y^*$ tal que $h(y) = g(T^{-1}(y))$, $\forall y \in TX$. Temos, para $x \in X$,

$$(T^*h)(x) = h(T(x)) = g(T^{-1}(T(x))) = g(x),$$

isto é, $T^*h = g$, e portanto T^* é sobrejetor.

($\Leftarrow$) Temos que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ é sobrejetor; segue do Teorema da Aplicação Aberta que T^* é aberta. Então, existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_{X^*} \subseteq T^*(B_{Y^*})$. Assim, dada $\varphi \in B_{X^*}$, temos $\delta\varphi \in \delta B_{X^*}$, portanto, existe $\phi \in B_{Y^*}$ tal que $T^*\phi = \delta\varphi$. Assim, para todo $x \in X$,

$$\delta|\varphi(x)| = |\phi(T(x))| \leq \|\phi\|\|T(x)\| \leq \|T(x)\|.$$

Segue do Teorema de Hahn-Banach que

$$\delta\|x\| = \delta \sup\{|\psi(x)| : \psi \in B_{X^*}\} \leq \|Tx\|.$$

Portanto, T é limitado por baixo.

Boa prova!